# 7 Extremwertaufgaben mit Funktion als Nebenbedingung

Siehe dazu den Abschnitt 11.3 in der Formelsammlung.

## 7.1 Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $f$ mit
$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 4$$
deren Graph zusammen mit dem Intervall $[0\,;\,8]$ der $x$-Achse und $[0\,;\,4]$ der $y$-Achse ein Dreieck bildet. Diesem Dreieck wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass die linke untere Ecke auf den Ursprung und die rechte obere Ecke $F$ auf $f$ zu liegen kommen.
   a) Wie gross muss das Rechteck dimensioniert werden, damit dessen Fläche $A_R$ maximal wird und wie gross wird $A_{max}$?
   b) Wieviel Prozent der Dreicksfläche $A_D$ wird durch das Rechteck bedeckt?

2. Gegeben ist die Funktion $f$ mit
$$f(x) = \sqrt{x+9}$$
deren Graph zusammen mit dem Intervall $[-9\,;\,0]$ der $x$-Achse und $[0\,;\,3]$ der $y$-Achse eine abgeschlossene Figur bildet. Dieser Figur wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass die linke obere Ecke $F$ auf $f$ und die rechte untere Ecke auf den Ursprung zu liegen kommen.
   a) Wie gross muss das Rechteck dimensioniert werden, damit dessen Fläche $A_R$ maximal wird und wie gross wird $A_{max}$?
   b) Wieviel Prozent der Fläche $A_F$ der abgeschlossenen Figur wird durch das Rechteck bedeckt?

## 7.2 Schwierige Aufgaben

Das Adjektiv „schwierig“ bezieht sich hier sowohl auf die Ausgangsgleichung der zu optimierenden Grösse, wie auch auf die Aufgaben selbst.

1. Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ mit
$$f(x) = -\frac{2}{3}\,x + 4 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 2\,x + 4,$$
deren Geraden zusammen mit der $x$-Achse ein Dreieck bilden. Diesem Dreieck wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass die linke obere Ecke $G$ auf $g$, die rechte obere Ecke $F$ auf $f$ und die untere Seite auf die $x$-Achse zu liegen kommen.
   a) Wie gross muss das Rechteck dimensioniert werden, damit dessen Fläche $A_R$ maximal wird und wie gross wird $A_{max}$?
   b) Wieviel Prozent der Dreicksfläche $A_D$ wird durch das Rechteck bedeckt?

2. Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ mit
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = -2\,x + 8,$$
deren Graphen zusammen mit dem Intervall $[0\,;\,4]$ der $x$-Achse eine abgeschlossene Figur bilden. Dieser Figur wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass die linke obere Ecke $F$ auf $f$, die rechte obere Ecke $G$ auf $g$ und die untere Seite auf die $x$-Achse zu liegen kommen.
   a) Wie gross muss das Rechteck dimensioniert werden, damit dessen Fläche $A_R$ maximal wird und wie gross wird $A_{max}$?
   b) Wieviel Prozent der Fläche $A_F$ der abgeschlossenen Figur wird durch das Rechteck bedeckt (Integralrechnung)?

## 7.1 Aufgaben (Lösungen)

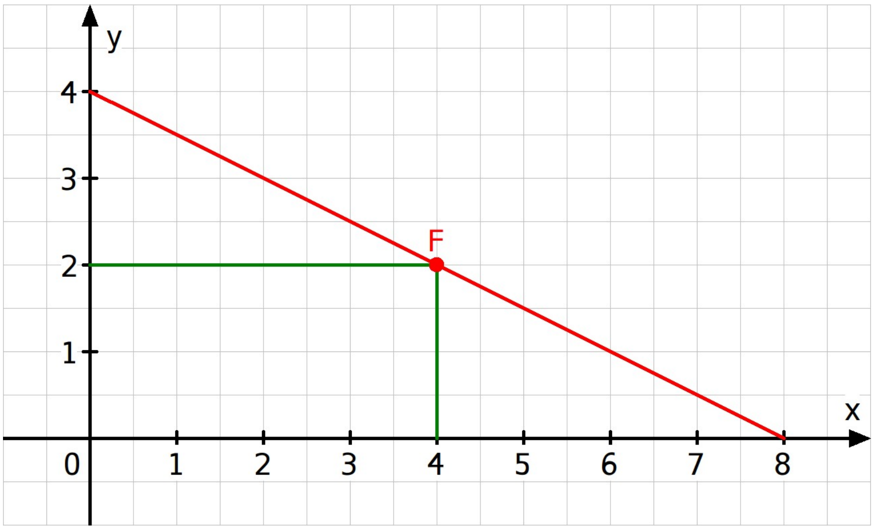
1. Für die Fläche des Rechtecks mit Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Ausgangsgleichung

$$A_R(b,h) = b \cdot h$$

und eine Zeichnung mit dem Graph der Funktion f gemäss

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 4$$

hilft beim Formulieren der Nebenbedingungen.




Mit den Koordinaten von $F(x\,;\,y)$ gilt

$$b = x \quad \text{und} \quad h = y = f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 4$$

für die Nebenbedingungen und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A_R(x) = x\left(-\frac{1}{2}\,x + 4\right) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 4\,x$$

womit die Ableitungen durch

$$A_R'(x) = -x + 4$$

und

$$A_R''(x) = -1$$

gegeben sind. Mit $A_R'(x) = 0$ erhält man den kritischen Punkt $x = 4$ und wegen $A_R''(4) = -1 < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Einsetzen von $x = 4$ in die Nebenbedingungen ergibt

$$b = 4 \quad \text{bzw.} \quad h = y = f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 2$$

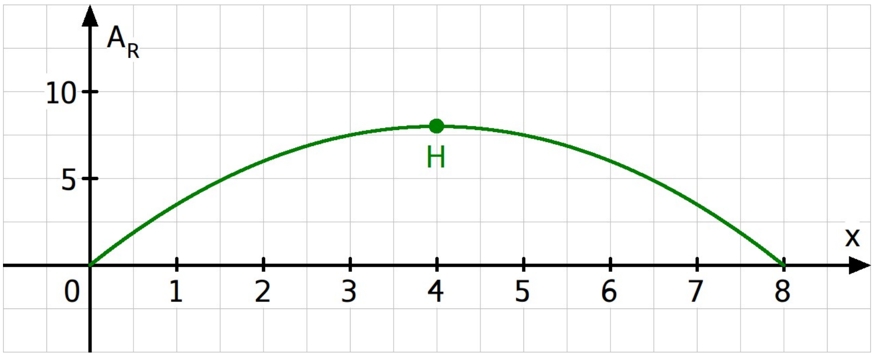
und in die Ausgangsgleichung

$$A_{max} = A_R(4,\,2) = 4 \cdot 2 = 8$$

für die maximale Fläche. Die nächste Zeichnung zeigt die von $x \in \,]0;8[$ abhängige Fläche

$$A_R(x) = x\left(-\frac{1}{2}\,x + 4\right)$$

mit dem Hochpunkt $H(4;8)$.




Wegen

$$A_D = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

für die Dreiecksfläche bedeckt das Rechteck 50 % von dessen Fläche.

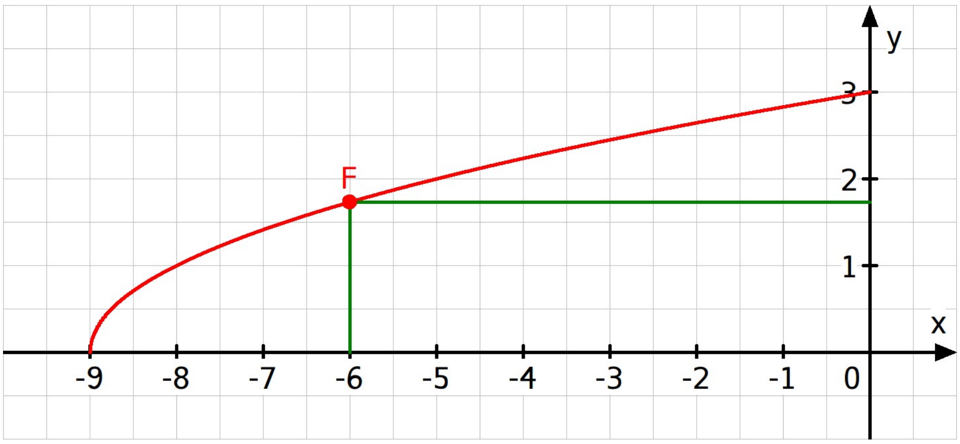
2. Für die Fläche des Rechtecks mit Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Ausgangsgleichung

$$A_R(b, h) = b \cdot h$$

und eine Zeichnung mit dem Graph der Funktion f gemäss

$$f(x) = \sqrt{x+9}$$

hilft beim Formulieren der Nebenbedingungen.




Mit den Koordinaten von $F(x\,;\,y)$ und wegen $x < 0$ gilt

$$b = -x \quad \text{und} \quad h = y = f(x) = \sqrt{x+9}$$

für die Nebenbedingungen und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A_R(x) = -x\,\sqrt{x+9} = -x\,(x+9)^{0.5}$$

womit die Ableitungen durch

$$\begin{aligned} A_R'(x) &= -1 \cdot (x+9)^{0.5} - x \cdot 0.5 \cdot (x+9)^{-0.5} \\ &= -\sqrt{x+9} - x\,\frac{1}{2\,\sqrt{x+9}} \\ &= -\frac{3}{2}\,\frac{x+6}{\sqrt{x+9}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_R''(x) &= -\frac{3}{2}\,\frac{1\cdot\sqrt{x+9}-(x+6)\,\frac{1}{2\sqrt{x+9}}}{(x+9)} \\ &= -\frac{3}{2}\,\frac{2\,(x+9)-(x+6)}{2\,(x+9)\,\sqrt{x+9}} \\ &= -\frac{3}{4}\,\frac{x+12}{\sqrt{(x+9)^3}} \end{aligned}$$

gegeben sind. Mit $A_R'(x) = 0$ erhält man $x = -6$ als kritischen Punkt und wegen $A_R''(-6) < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Einsetzen von $x = -6$ in die Nebenbedingungen ergibt

$$b = -(-6) = 6 \quad \text{bzw.} \quad h = y = f(-6) = \sqrt{-6+9} = \sqrt{3}$$

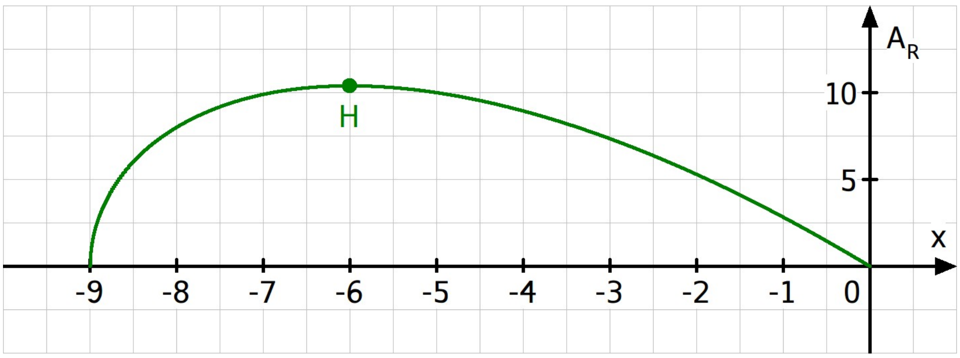
und in die Ausgangsgleichung

$$A_{max} = A_R\left(6,\, \sqrt{3}\right) = 6\cdot\sqrt{3} = 10.4$$

für die maximale Fläche. Die nächste Zeichnung zeigt die von $x \in \,]-9;0[$ abhängige Fläche

$$A_R(x) = -x\,\sqrt{x+9}$$

mit dem Hochpunkt $H(-6; 10.4)$.




Die Stammfunktion zu $f(x) = \sqrt{x+9} = (x+9)^{0.5}$ ist

$$F(x) = \frac{2}{3}\,(x+9)^{1.5} + c$$

und damit ergibt sich die Fläche

$$A_F = \int_{-9}^{0} (x+9)^{0.5}\,dx = \left[\frac{2}{3}\,(x+9)^{1.5}\right]_{-9}^{0} = \frac{2}{3}\,(0+9)^{1.5} - \frac{2}{3}\,(-9+9)^{1.5} = 18 - 0 = 18$$

der abgeschlossenen Figur. Wegen

$$\frac{A_{max}}{A_F} = \frac{10.4}{18} = 0.577$$

beträgt die maximale Fläche des Rechtecks etwa 58 % der Fläche der Figur.

3. Für den Umfang des Rechtecks mit Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Ausgangsgleichung

$$U_R(b,h) = 2\,b + 2\,h$$

und eine Zeichnung mit dem Graph der Funktion f gemäss

$$f(x) = \sqrt{x+9}$$

hilft beim Formulieren der Nebenbedingungen.


Mit den Koordinaten von $F(x\,;\,y)$ und wegen $x < 0$ gilt

$$b = -x \quad \text{und} \quad h = y = f(x) = \sqrt{x+9}$$

für die Nebenbedingungen und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$U_R(x) = 2\,(-x) + 2\,\sqrt{x+9} = 2\,(x+9)^{0.5} - 2\,x$$

womit die Ableitungen durch

$$\begin{aligned} U_R'(x) &= (x+9)^{-0.5} - 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+9}} - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_R''(x) &= -0.5\,(x+9)^{-1.5} \\ &= -\frac{1}{2\,\sqrt{(x+9)^3}} \end{aligned}$$

gegeben sind. Mit $U_R'(x) = 0$ erhält man $x = -8.75$ als krit. Punkt und wegen $U_R''(-8.75) < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Einsetzen von $x = -8.75$ in die Nebenbedingungen ergibt

$$b = -(-8.75) = 8.75 \quad \text{bzw.} \quad h = y = f(-8.75) = \sqrt{-8.75+9} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

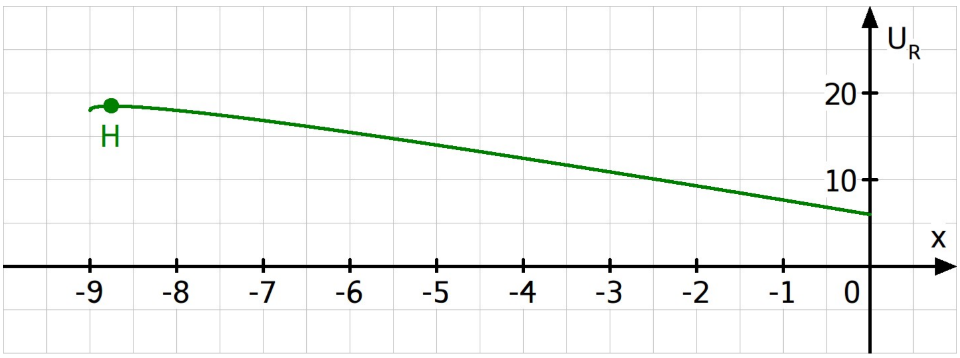
und in die Ausgangsgleichung

$$U_{max} = U_R(8.75,\, 0.5) = 2 \cdot 8.75 + 2 \cdot 0.5 = 18.5$$

für den maximalen Umfang. Die nächste Zeichnung zeigt den von $x \in \,]-9;0[$ abhängigen Umfang

$$U_R(x) = 2\,\sqrt{x+9} - 2\,x$$

mit dem Hochpunkt $H(-8.75;18.5)$.



## 7.2 Schwierige Aufgaben (Lösungen)

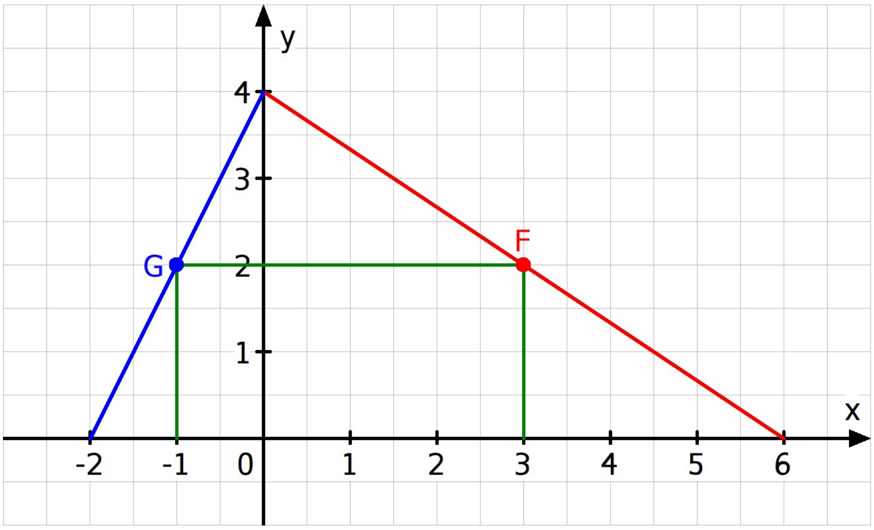
1. Für die Fläche des Rechtecks mit Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Ausgangsgleichung

$$A_R(b,h) = b \cdot h$$

und eine Zeichnung mit den Graphen der Funktionen g und f gemäss

$$g(x) = 2\,x + 4 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -\frac{2}{3}\,x + 4$$

hilft beim Formulieren der Nebenbedingungen.




Mit den Koordinaten von $G(x_g\,;\,y_g)$ sowie $F(x\,;\,y)$ und wegen $x_g < 0$ gilt

$$b = -x_g + x \quad \text{bzw.} \quad h = y = f(x) = -\frac{2}{3}\,x + 4$$

für die Nebenbedingungen und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A_R(x, x_g) = (-x_g + x)\left(-\frac{2}{3}\,x + 4\right),$$

wobei diese immer noch von zwei Variablen $x$ und $x_g$ abhängig ist, d.h. es wird eine weitere Nebenbedingung benötigt. Weil $G$ und $F$ auf derselben Höhe $h$ liegen, gilt mit deren Koordinaten

$$y_g = y \quad \Leftrightarrow \quad g(x_g) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x_g + 4 = -\frac{2}{3}\,x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_g = -\frac{1}{3}\,x$$

und eingesetzt in $A_R(x, x_g)$

$$\begin{aligned} A_R(x) &= \left(-\left(-\frac{1}{3}\,x\right) + x\right)\left(-\frac{2}{3}\,x + 4\right) \\ &= \frac{4}{3}\,x\left(-\frac{2}{3}\,x + 4\right) \\ &= -\frac{8}{9}\,x^2 + \frac{16}{3}\,x \end{aligned}$$

womit die Rechteckfläche $A_R$ nur noch von $x$ abhängig ist und die Ableitungen

$$A_R'(x) = -\frac{16}{9}\,x + \frac{16}{3} \quad \text{bzw.} \quad A_R''(x) = -\frac{16}{9}$$

ergibt. Mit $A'_R(x) = 0$ erhält man den kritischen Punkt $x = 3$ und wegen $A''_R(3) = -16/9 < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Die Nebenbedingungen liefern

$$x_g = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1, \quad b = -(-1) + 3 = 4 \quad \text{und} \quad h = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2$$

sowie die Punkte

$$G(-1\,;2) \quad \text{und} \quad F(3\,;2).$$

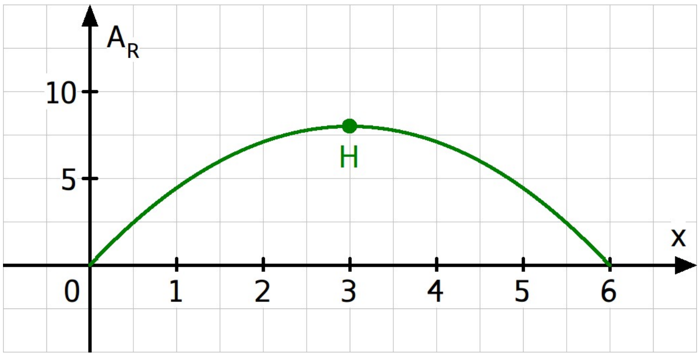
Für die maximale Rechteckfläche gilt

$$A_{max} = A_R(4, 2) = 4 \cdot 2 = 8$$

und die nächste Zeichnung zeigt die von $x \in ]0;6[$ abhängige Fläche

$$A_R(x) = \frac{4}{3}\,x\left(-\frac{2}{3}\,x + 4\right)$$

mit dem Hochpunkt $H(3;8)$.




Wegen

$$A_D = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \quad \text{und} \quad \frac{A_{max}}{A_D} = \frac{8}{16} = 0.5$$

beträgt die maximale Fläche des Rechtecks 50 % der Fläche des Dreiecks.

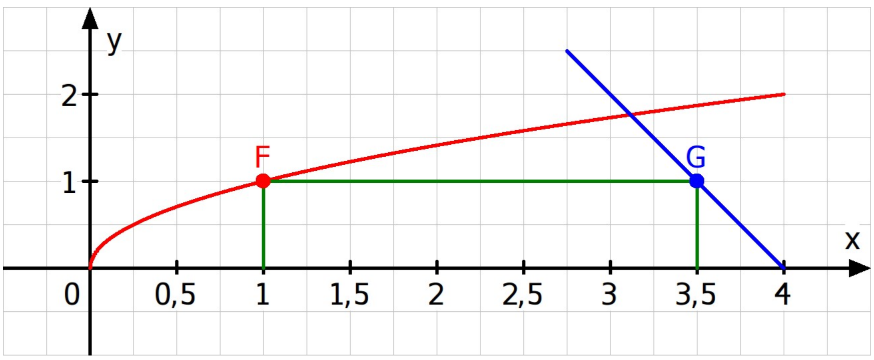
2. Für die Fläche des Rechtecks mit Breite $b$ und Höhe $h$ gilt die Ausgangsgleichung

$$A_R(b, h) = b \cdot h$$

und eine Zeichnung mit den Graphen der Funktionen g und f gemäss

$$g(x) = -2\,x + 8 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

hilft beim Formulieren der Nebenbedingungen.



Mit den Koordinaten von $F(x\,;\,y)$ sowie $G(x_g\,;\,y_g)$ und wegen $x < x_g$ gilt

$$b = x_g - x \quad \text{bzw.} \quad h = y = f(x) = \sqrt{x}$$

für die Nebenbedingungen und eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$A_R(x, x_g) = (x_g - x)\sqrt{x},$$

wobei diese immer noch von zwei Variablen $x$ und $x_g$ abhängig ist, d.h. es wird eine weitere Nebenbedingung benötigt. Weil $G$ und $F$ auf derselben Höhe $h$ liegen, gilt mit deren Koordinaten

$$y_g = y \quad \Leftrightarrow \quad g(x_g) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -2\,x_g + 8 = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x_g = 4 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

und eingesetzt in $A_R(x, x_g)$

$$\begin{aligned} A_R(x) &= \left(4 - \frac{\sqrt{x}}{2} - x\right)\sqrt{x} \\ &= -x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \\ &= -x^{1.5} - \frac{1}{2}\,x + 4\,x^{0.5} \end{aligned}$$

womit die Rechteckfläche $A_R$ nur noch von $x$ abhängig ist und die Ableitungen

$$\begin{aligned} A_R'(x) &= -\frac{3}{2}\,x^{0.5} - \frac{1}{2} + 2\,x^{-0.5} \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(3\sqrt{x} + 1 - 4\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A_R''(x) &= -\frac{3}{4}\,x^{-0.5} - x^{-1.5} \\ &= -\frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

ergibt. Mit $A_R'(x) = 0$ und der Substitution $z = \sqrt{x}$ erhält man die Gleichungen

$$3\sqrt{x} + 1 - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,z + 1 - \frac{4}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,z^2 + z - 4 = 0$$

und mit der Diskrimante $D = b^2 - 4\,a\,c = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 49$ gilt

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 1 \quad \wedge \quad z_2 = -\frac{4}{3},$$

wobei die negative Zwischenlösung $z_2$ wegen der Substitution $z = \sqrt{x} > 0$ wegfällt. Die Rücksubstitution $x = z^2$ liefert den kritischen Punkt

$$x = z^2 = 1^2 = 1$$

und wegen $A_R''(1) < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Die Nebenbedingungen liefern

$$x_g = 4 - \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.5, \quad b = 3.5 - 1 = 2.5 \quad \text{und} \quad h = \sqrt{1} = 1$$

sowie die Punkte

$$F(1\,;\,1) \quad \text{und} \quad G(3.5\,;\,1).$$

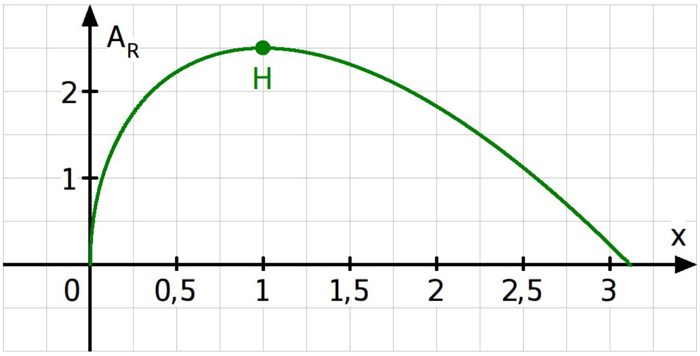
Für die maximale Rechteckfläche gilt

$$A_{max} = A_R(2.5,\, 1) = 2.5 \cdot 1 = 2.5$$

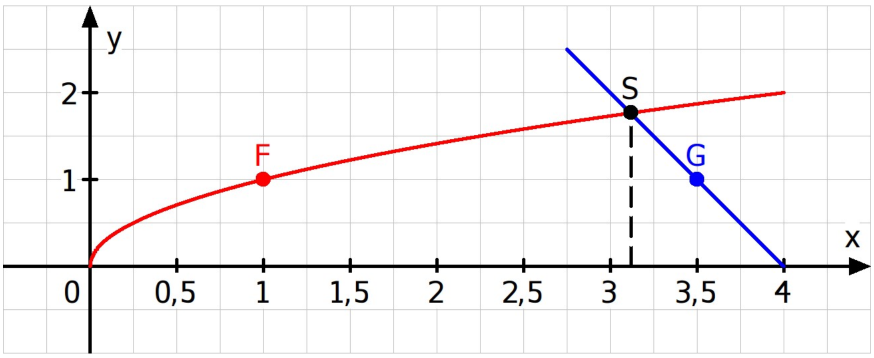
und die nächste Zeichnung zeigt die von $x \in ]0;3.12[$ abhängige Fläche

$$A_R(x) = -x^{1.5} - \frac{1}{2}\,x + 4\,x^{0.5}$$

mit dem Hochpunkt $H(1;2.5)$.




Um die Fläche der Figur über dem Intervall $[0\,;\,4]$ zu erhalten, muss der Schnittpunkt von $f$ und $g$ berechnet werden, damit man die Fläche unter dem Graphen von $f$ und jene unter $g$ separat berechnen kann.




Mit $f(x) = g(x)$ und der Substitution $z = \sqrt{x}$ erhält man die Gleichungen

$$\sqrt{x} = -2\,x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x + \sqrt{x} - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,z^2 + z - 8 = 0$$

und mit der Diskrimante $D = b^2 - 4\,a\,c = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 65$ gilt

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 8.06}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 1.77 \quad \wedge \quad z_2 = -\frac{9.06}{4},$$

wobei die negative Zwischenlösung $z_2$ wegen der Substitution $z = \sqrt{x} > 0$ wegfällt. Die Rücksubstitution $x = z^2$ liefert mit

$$x_s = 1.77^2 = 3.12$$

die $x$-Koordinate des Schnittpunktes $S$ und damit die zwei Intervalle $[0\,;\,3.12]$ und $[3.12\,;\,4]$. Die Stammfunktionen zu $f(x) = \sqrt{x} = x^{0.5}$ und $g(x) = -2\,x + 8$ sind

$$F(x) = \frac{2}{3}\,x^{1.5} + c$$

bzw.

$$G(x) = -x^2 + 8\,x + c$$

und damit ergeben sich die beiden Gebiete

$$G_f = \int_0^{3,12} f(x)\,dx = \int_0^{3,12} x^{0.5}\,dx = \left[\frac{2}{3}\,x^{1.5}\right]_0^{3,12}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 3,12^{1.5} - \frac{2}{3}\cdot 0^{1.5} = 3.67$$

sowie

$$G_g = \int_{3,12}^{4} g(x)\,dx = \int_{3,12}^{4} (-2\,x+8)\,dx = \left[-x^2+8\,x\right]_{3,12}^{4}$$
$$= -4^2+8\cdot 4-(-3,12^2+8\cdot 3,12) = 0.780$$

und die Fläche $A_F = G_f + G_g = 3.67 + 0.780 = 4.45$ der Figur. Wegen

$$\frac{A_{max}}{A_F} = \frac{2.5}{4.45} = 0.562$$

beträgt die maximale Fläche des Rechtecks etwa 56 % der Fläche der Figur.