4 Interpolation

Zum Thema Interpolation gibt's auch Arbeitsblätter aus dem 3. Semester.

4.1 Lineare Funktionen

Die gesuchten Funktionen sind linear und m steht für die Steigung.

1. $P(1\,;\,2.5)$ und $Q(-2\,;\,4)$
2. $P(-3\,;\,-9)$ und $Q(6\,;\,12)$
3. $m=-\frac{5}{4}$ und $P(2\,;\,-2.25)$
4. $m=\frac{4}{5}$ und $P(1\,;\,1.05)$

4.2 Quadratische Funktionen

Die gesuchten Funktionen sind quadratisch, z.T. sind es Sonderformen.

1. $P(1\,;\,0)$, $Q(-1\,;\,8)$ und $R(2\,;\,5)$
2. $P(-2\,;\,0)$, $Q(2\,;\,0)$ und $R(1\,;\,3)$
3. $P(-1\,;\,0)$, $Q(2\,;\,0)$ und $R(3\,;\,12)$
4. $P(0\,;\,0)$, $Q(1\,;\,1)$ und $R(-2\,;\,-14)$

4.3 Wurzelfunktionen

1. $f(x)=a\sqrt{x}+b$ mit $P(1\,;\,5)$ und $Q\left(\frac{1}{4}\,;\,3\right)$
2. $f(x)=a\sqrt{x+b}$ mit $P(14\,;\,-4)$ und $Q(2\,;\,-2)$
3. $f(x)=\sqrt{a\,x+b}$ mit $P\left(\frac{5}{2}\,;\,2\right)$ und $Q\left(\frac{5}{8}\,;\,\frac{1}{2}\right)$

4.4 Gebrochenlineare Funktionen

1. $f(x)=\dfrac{a}{x}+b$ mit $P(2\,;\,1)$ und $Q\left(\frac{2}{3}\,;\,6\right)$
2. $f(x)=\dfrac{a}{x+b}$ mit $P\left(14\,;\,\frac{1}{4}\right)$ und $Q(1\,;\,-3)$
3. $f(x)=\dfrac{1}{a\,x+b}$ mit $P(1\,;\,-1)$ und $Q\left(\frac{1}{4}\,;\,2\right)$

4.5 Potenzfunktionen

1. $f(x)=a\,x^3+b$ mit $P(2\,;\,3)$ und $Q\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{15}{16}\right)$
2. $f(x)=a\,(x+b)^3$ mit $P\left(1\,;\,\frac{27}{2}\right)$ und $Q\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)$

4.6 Exponentialfunktionen

1. $f(x)=a^x+b$ mit $P\left(1\,;\,\frac{5}{2}\right)$ und $Q(-1\,;\,1)$
2. $f(x)=a^{x+b}$ mit $P(1\,;\,9)$ und $Q(-1\,;\,1)$

4.7 Logarithmusfunktionen

1. $f(x)=\log_a(x)+b$ mit $P(9\,;\,1)$ und $Q(1\,;\,-1)$
2. $f(x)=\log_a(x+b)$ mit $P\left(\frac{5}{2}\,;\,1\right)$ und $Q(1\,;\,-1)$

4.1 Lineare Funktionen (Lösungen)

1. $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 3$
2. $f(x) = \frac{7}{3}\,x - 2$
3. $f(x) = -\frac{5}{4}\,x + \frac{1}{4}$
4. $f(x) = \frac{4}{5}\,x + \frac{1}{4}$

4.2 Quadratische Funktionen (Lösungen)

1. Einsetzen in die allg. Form $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ergibt ein Gleichungssystem mit den Variablen a, b und c. Die Lösung ist
$$f(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 1$$
2. Die beiden Nullstellen haben denselben Abstand vom Ursprung, d.h. es handelt sich um die Sonderform $f(x) = a\,x^2 + c$ und Einsetzen ergibt ein Gleichungssystem mit den Variablen a und c. Die Lösung ist
$$f(x) = -\,x^2 + 4$$
3. Einsetzen der Nullstellen in die Produktform $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ ergibt eine Gleichung, wo nur noch der Streckungsfaktor a unbekannt ist. Die Lösung ist
$$f(x) = 3\,(x + 1)\,(x - 2)$$
4. Die Parabel verläuft durch den Ursprung, d.h. es handelt sich um die Sonderform $f(x) = a\,x^2 + b\,x$ und Einsetzen ergibt ein Gleichungssystem mit den Variablen a und b. Die Lösung ist
$$f(x) = -2\,x^2 + 3\,x$$

4.3 Wurzelfunktionen (Lösungen)

1. Einsetzen und vereinfachen mit $\sqrt{1/4} = 1/2$ liefert die Gleichungen
$$a + b = 5 \quad \text{sowie} \quad 0.5\,a + b = 3$$
und die Subtraktionsmethode eliminiert die Variable b. Die Lösung ist
$$f(x) = 4\,\sqrt{x} + 1$$
2. Einsetzen und umstellen nach der Variable a liefert die Gleichungen
$$a = \frac{-4}{\sqrt{14 + b}} \quad \text{sowie} \quad a = \frac{-2}{\sqrt{2 + b}}$$
und die Gleichsetzmethode eliminiert die Variable a. Mit den Nennern multiplizieren und anschliessendes Quadrieren ergibt
$$16\,(2 + b) = 4\,(14 + b)$$
und damit ist die Lösung
$$f(x) = -\,\sqrt{x + 2}$$
3. Einsetzen, quadrieren und umstellen nach der Variable b liefert die Gleichungen
$$b = 4 - \frac{5}{2}\,a \quad \text{sowie} \quad b = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\,a$$
und die Gleichsetzmethode eliminiert die Variable b. Die Lösung ist
$$f(x) = \sqrt{2\,x - 1}$$

4.4 Gebrochenlineare Funktionen (Lösungen)

1. Einsetzen und vereinfachen mit $\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$ liefert die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\,a + b = 1 \quad \text{sowie} \quad \frac{3}{2}\,a + b = 6$$

und die Subtraktionsmethode eliminiert die Variable b. Die Lösung ist

$$f(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{2}$$

2. Einsetzen und umstellen nach der Variable a bzw. dem Ausdruck $4\,a$ liefert die Gleichungen

$$4\,a = 14 + b \quad \text{sowie} \quad 4\,a = -12 - 12\,b$$

und die Gleichsetzmethode eliminiert die Variable a. Die Lösung ist

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

3. Einsetzen und umstellen nach der Variable b liefert die Gleichungen

$$b = -1 - a \quad \text{sowie} \quad b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,a$$

Die Lösung ist

$$f(x) = \frac{1}{-2\,x + 1}$$

4.5 Potenzfunktionen (Lösungen)

1. Einsetzen liefert die Gleichungen

$$8\,a + b = 3 \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{8}\,a + b = -\frac{15}{16}$$

und die Subtraktionsmethode eliminiert die Variable b. Die Lösung ist

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^3 - 1$$

2. Einsetzen und umstellen nach der Variable a bzw. dem Ausdruck $2\,a$ liefert die Gleichungen

$$2\,a = \frac{27}{(1+b)^3} \quad \text{sowie} \quad 2\,a = \frac{1}{(-1+b)^3}$$

und die Gleichsetzmethode eliminiert die Variable a. Anschliessendes Ziehen der dritten Wurzel ergibt

$$\frac{3}{1+b} = \frac{1}{-1+b}$$

und damit ist die Lösung

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(x+2)^3$$

4.6 Exponentialfunktionen (Lösungen)

1. Einsetzen und vereinfachen mit $a^{-1} = \frac{1}{a}$ liefert die Gleichungen

$$a + b = \frac{5}{2} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{a} + b = 1$$

und die Subtraktionsmethode eliminiert die Variable b. Die dabei entstehende Gleichung wird beidseitig mit a multipliziert, wodurch sich eine quadratische Gleichung in a ergibt mit den Lösungen $a_1 = 2$ und $a_2 = -0.5$. Die negative Lösung kommt als Basis einer Exponentialfunktion nicht in Frage, d.h. die Lösung ist

$$f(x) = 2^x + \frac{1}{2}$$

2. Einsetzen liefert die Gleichungen

$$a^{1+b} = 9 \quad \text{sowie} \quad a^{-1+b} = 1$$

und beidseitiges Logarithmieren mit der Basis a ergibt

$$1 + b = \log_a(9) \quad \text{bzw.} \quad -1 + b = \log_a(1)$$

Wegen $\log_a(1) = 0$ ergibt sich aus der 2. Gleichung $-1 + b = 0$ und somit $b = 1$. Die Lösung ist

$$f(x) = 3^{x+1}$$

4.7 Logarithmusfunktionen (Lösungen)

1. Einsetzen liefert die Gleichungen

$$\log_a(9) + b = 1 \quad \text{sowie} \quad \log_a(1) + b = -1$$

und wegen $\log_a(1) = 0$ ergibt sich aus der 2. Gleichung $b = -1$. Die Lösung ist

$$f(x) = \log_3(x) - 1$$

2. Einsetzen liefert die Gleichungen

$$\log_a\left(\frac{5}{2} + b\right) = 1 \quad \text{sowie} \quad \log_a(1 + b) = -1$$

und umschreiben mit dem L1-Gesetz aus der Formelsammlung Abschnitt 2.10

$$a^1 = \frac{5}{2} + b \quad \text{sowie} \quad a^{-1} = 1 + b$$

und die Subtraktionsmethode eliminiert die Variable b. Die dabei entstehende Gleichung wird beidseitig mit a multipliziert, wodurch sich eine quadratische Gleichung in a ergibt mit den Lösungen $a_1 = 2$ und $a_2 = -0.5$. Die negative Lösung kommt als Basis einer Logarithmusfunktion nicht in Frage, d.h. die Lösung ist

$$f(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$