3 Funktionen diskutieren

3.1 Polynomfunktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.6 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x$
2. $f(x) = \frac{1}{27}\,\left(x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 26\right) \quad \text{mit} \quad f(1) = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - 2\,x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x \quad \text{mit} \quad f(2) = 0$

3.2 Gebrochenlineare Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.8 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \dfrac{2\,x + 4}{x - 2}$
2. $f(x) = \dfrac{3\,x - 6}{x + 1}$

3.3 Gebrochenrationale Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.7 und 11 in der Formelsammlung. In den Arbeitsblättern zum dritten Semester gibt es sehr ausführliche Lösungen zu neun ähnlichen Aufgaben.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 8}{x - 4}$
2. $f(x) = \dfrac{0.5\,x^2 - x + 0.5}{x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
5. $f(x) = \dfrac{8}{(x^2 - 4)\,(x + 4)}$
6. $f(x) = ?$

Die Nenner von solchen Ableitungen werden nie ausmultipliziert, da man Summen nicht kürzen kann!

3.3 Gebrochenrationale Funktionen (Lösungen)

3.3.1 Aufgabe 1 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 8}{x - 4} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Mit
$$u(x) = (x + 4)\,(x - 2) = 0$$
folgt, dass es bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$ je eine Nullstelle mit VZW gibt.

2. Mit
$$v(x) = x - 4 = 0$$
folgt, dass es bei $x_3 = 4$ eine Polstelle mit VZW gibt und $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ gilt.

3. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = 2$.

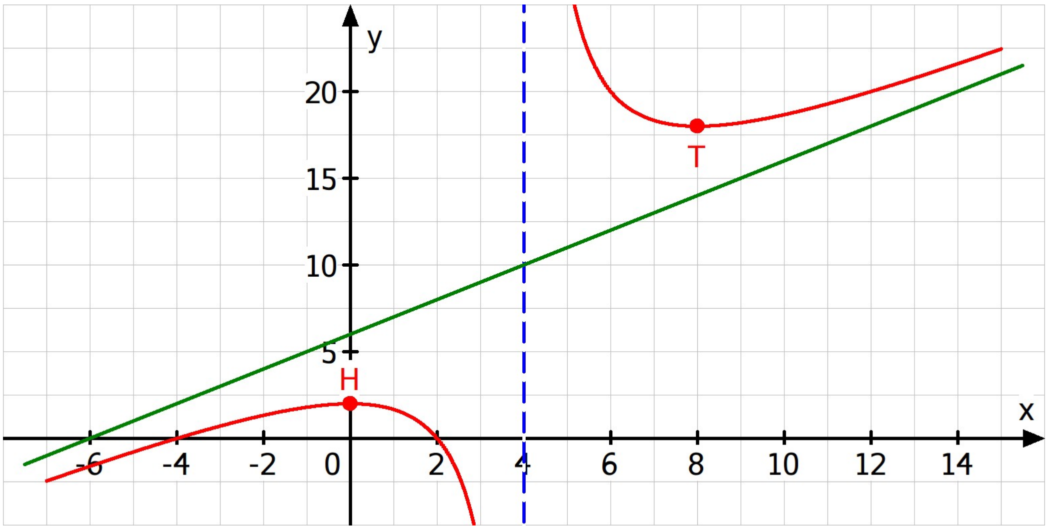
4. Eine Polynomdivision liefert
$$\left(x^2 + 2\,x - 8\right) : (x - 4) = x + 6 + \frac{16}{x - 4},$$
d.h. es ist
$$a(x) = x + 6 \quad \text{und} \quad d(x) = \frac{16}{x - 4} \approx \frac{16}{x},$$
wobei a die Asymptote ist und die Vereinfachung von d nur für $x \to \pm\infty$ gilt.

5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{16}{\infty} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{16}{(-\infty)} \to 0^-$$
d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a.

6. Weil es nur eine Polstelle gibt, welche nicht auf der y-Achse liegt, kann die Funktion f weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.

7. Die Quotientenregel oder der Befehl
```
D[(x^2 + 2 x - 8) / (x - 4), {x, n}]
```
auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2$ für die ersten zwei Ableitungen) liefern
$$f'(x) = \frac{x\,(x - 8)}{(x - 4)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{32}{(x - 4)^3},$$
womit klar wird, dass es wegen $f''(x) \neq 0$ keinen Wendepunkt geben kann und man daher die dritte Ableitung f''' nicht berechnen muss.

8. Wegen
$$f'(x) = \frac{x\,(x - 8)}{(x - 4)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x - 8) = 0$$
hat f zwei kritische Punkte bei $x_4 = 0$ und $x_5 = 8$. Mit f'' wie oben und $f(x_n) = y_n$ gilt
$$f''(0) = \frac{32}{(-4)^3} < 0 \quad \wedge \quad f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad H(0;2)$$
und
$$f''(8) = \frac{32}{(8 - 4)^3} > 0 \quad \wedge \quad f(8) = 18 \quad \Rightarrow \quad T(8;18),$$
d.h. die Funktion f hat zwei Extrema, davon einen Tiefpunkt T (Minimum) und einen Hochpunkt H (Maximum).



3.3.2 Aufgabe 2 (Lösung)

$$f(x) = \frac{0.5\,x^2 - x + 0.5}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Mit
$$u(x) = 0.5\,(x^2 - 2\,x + 1) = 0.5\,(x-1)^2 = 0$$
folgt, dass es bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle ohne VZW gibt. Weil der Graph von f die x-Achse bei der Nullstelle ohne VZW nur berührt aber nicht schneidet, muss dort ein Extrema liegen.

2. Mit
$$v(x) = x + 1 = 0$$
folgt, dass es bei $x_2 = -1$ eine Polstelle mit VZW gibt und $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt.

3. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = 0.5$.

4. Eine Polynomdivision liefert
$$\left(0.5\,x^2 - x + 0.5\right) : (x+1) = 0.5\,x - 1.5 + \frac{2}{x+1},$$
d.h. es ist
$$a(x) = 0.5\,x - 1.5 \quad \text{und} \quad d(x) = \frac{2}{x+1} \approx \frac{2}{x},$$
wobei a die Asymptote ist und die Vereinfachung von d nur für $x \to \pm\infty$ gilt.

5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{2}{\infty} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{2}{(-\infty)} \to 0^-$$
d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a.

6. Weil es nur eine Polstelle gibt, welche nicht auf der y-Achse liegt, kann die Funktion f weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.

7. Die Quotientenregel oder der Befehl

```
D[(0.5 x^2 - x + 0.5) / (x + 1), {x, n}]
```

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2$ für die ersten zwei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = 0.5\,\frac{(x+3)\,(x-1)}{(x+1)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3},$$

womit klar wird, dass es wegen $f''(x) \neq 0$ keinen Wendepunkt geben kann und man daher die dritte Ableitung f''' nicht berechnen muss.

8. Wegen

$$f'(x) = 0.5\,\frac{(x+3)\,(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)\,(x-1) = 0$$

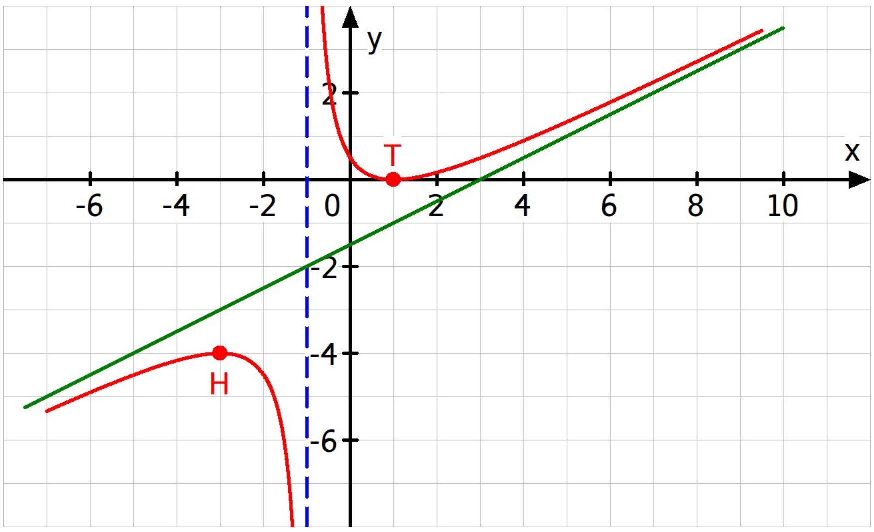
hat f zwei kritische Punkte bei $x_3 = -3$ und $x_4 = 1$. Mit f'' wie oben und $f(x_n) = y_n$ gilt

$$f''(-3) = \frac{4}{(-3+1)^3} < 0 \quad \wedge \quad f(-3) = -4 \quad \Rightarrow \quad H(-3\,;\,-4)$$

und

$$f''(1) = \frac{4}{(1+1)^3} > 0 \quad \wedge \quad f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(1\,;\,0),$$

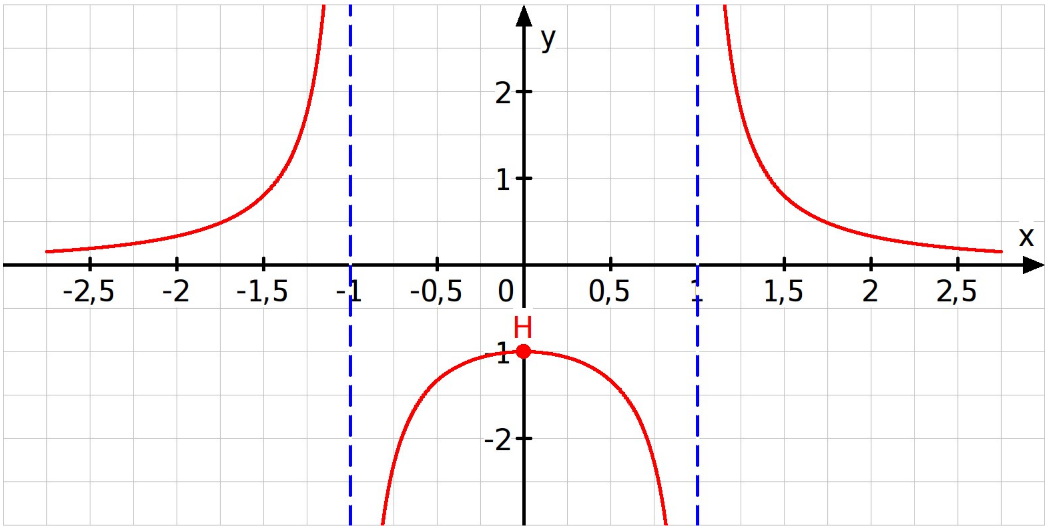
d.h. die Funktion f hat zwei Extrema, davon einen Tiefpunkt T (Minimum) und einen Hochpunkt H (Maximum).



3.3.3 Aufgabe 3 (Lösung)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Wegen $u(x) = 1 \neq 0$ hat f keine Nullstellen.
2. Mit
$$v(x) = x^2 - 1 = (x+1)\,(x-1) = 0$$
folgt, dass es bei $x_{1,2} = \pm 1$ je eine Polstelle mit VZW gibt und $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ gilt.
3. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = -1$.
4. Weil f echt gebrochen ist gilt $a(x) = 0$, d.h. die x-Achse ist Asymptote. Ausserdem ist
$$d(x) = f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \approx \frac{1}{x^2}$$
für $x \to \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x.
5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{1}{(\pm\infty)^2} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ links und rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a.
6. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f ausschliesslich gerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f symmetrisch bezüglich der y-Achse.
7. Die Kehrwertregel liefert
$$f'(x) = -\frac{2\,x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$
und mit Quotienten- sowie Kettenregel berechnet man
$$f''(x) = -\frac{2\,\left(x^2-1\right)^2 - 2\,x \cdot 2\,\left(x^2-1\right) \cdot 2\,x}{\left(x^2-1\right)^4} = -\frac{2\,\left(x^2-1\right) - 8\,x^2}{\left(x^2-1\right)^3} = 2\,\frac{3\,x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3},$$
um dann – völlig erschöpft – mit dem Befehl
```
D[1 / (x^2 - 1), {x, 3}]
```
auf www.wolframalpha.com die dritte Ableitung
$$f'''(x) = -24\,\frac{x\,(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$
berechnen zu lassen. Irgendwann ist einfach mal Schluss!
8. Wegen
$$f'(x) = -\frac{2\,x}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x = 0$$
hat f einen kritischen Punkt bei $x_3 = 0$. Mit f'' wie oben und $f(x_n) = y_n$ gilt
$$f''(0) = -2\,\frac{-1}{(-1)^3} = -2 < 0 \quad \wedge \quad f(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad H(0\,;\,-1),$$
d.h. die Funktion f hat einen Hochpunkt H (Maximum).
9. Wegen
$$f''(x) = 2\,\frac{3\,x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,x^2 + 1 = 0$$
hat f' keinen kritischen Punkt, d.h. es gibt keinen Wendepunkt und man hätte sich die Berechnung der dritten Ableitung f''' sparen können.



3.3.4 Aufgabe 4 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Wegen $u(x) = x = 0$ hat f eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = 0$.
2. Mit
$$v(x) = x^2 - 9 = (x+3)\,(x-3) = 0$$
folgt, dass es bei $x_{2,3} = \pm 3$ je eine Polstelle mit VZW gibt und $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ gilt.
3. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstelle x_1 sind identisch.
4. Weil f echt gebrochen ist gilt $a(x) = 0$, d.h. die x-Achse ist Asymptote. Ausserdem ist
$$d(x) = f(x) = \frac{x}{x^2 - 9} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$
für $x \to \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x.
5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{1}{\infty} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{1}{(-\infty)} \to 0^-$$
d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a.
6. Für das Zählerpolynom von f gilt
$$u(x) = x = -(-x) = -u(-x),$$
d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Für das Nennerpolynom gilt
$$v(x) = x^2 - 9 = (-x)^2 - 9 = v(-x),$$
d.h. es ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Mit
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{-u(-x)}{v(-x)} = -\frac{u(-x)}{v(-x)} = -f(-x)$$
ist der Graph der Funktion f ebenfalls symmetrisch bezüglich dem Ursprung, also punktsymmetrisch.

7. Die Quotientenregel oder der Befehl

```
D[x / (x^2 - 9), {x, n}]
```

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1,2,3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = -\frac{x^2+9}{(x^2-9)^2},$$

$$f''(x) = 2\,x\,\frac{x^2+27}{(x^2-9)^3}$$

und

$$f'''(x) = -6\,\frac{x^4+54\,x^2+81}{(x^2-9)^4}.$$

8. Wegen

$$f'(x) = -\frac{x^2+9}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+9=0$$

hat f keinen kritischen Punkt und damit auch keine Extrema.

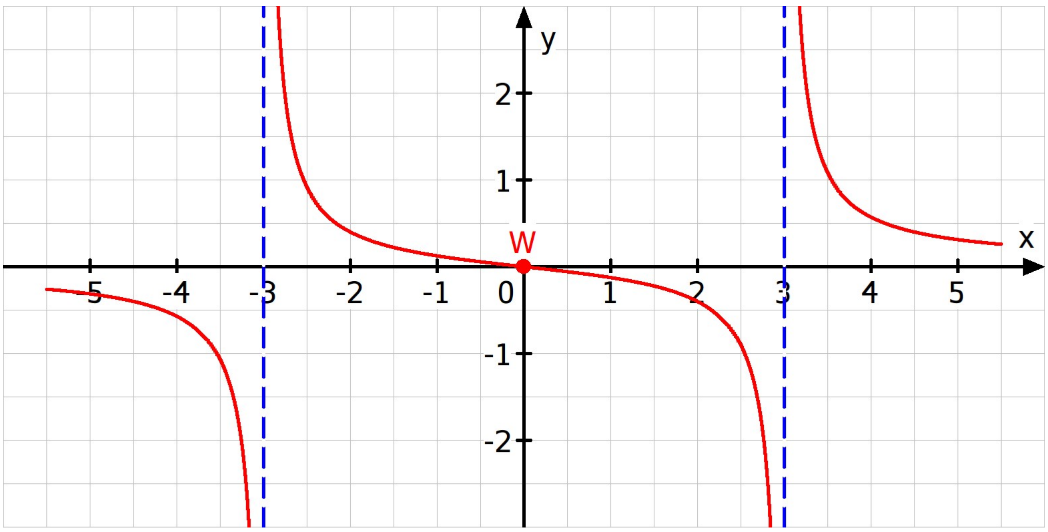
9. Wegen

$$f''(x) = 2\,x\,\frac{x^2+27}{(x^2-9)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x\,(x^2+27)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x=0$$

hat f' einen kritischen Punkt bei $x_4 = 0$. Mit f''' wie oben und $f(x_n) = y_n$ gilt

$$f'''(0) = -6\,\frac{81}{(-9)^4} < 0 \quad \wedge \quad f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad W(0\,;0),$$

d.h. die Funktion f hat im Ursprung einen Wendepunkt.



3.3.5 Aufgabe 5 (Lösung)

$$f(x) = \frac{8}{(x^2-4)\,(x+4)} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Wegen $u(x) = 8 \neq 0$ hat f keine Nullstellen.
2. Mit
$$v(x) = (x^2-4)\,(x+4) = (x+2)\,(x-2)\,(x+4) = 0$$
gibt es bei $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_3 = -4$ je eine Polstelle mit VZW und es gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; \pm 2\}$.
3. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = -0.5$.
4. Weil f echt gebrochen ist gilt $a(x) = 0$, d.h. die x-Achse ist Asymptote. Ausserdem ist
$$d(x) = f(x) = \frac{8}{(x^2-4)\,(x+4)} \approx \frac{8}{x^3}$$
für $x \to \pm\infty$, d.h. „sehr grosse" Werte von x.
5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{8}{\infty^3} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit" rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{8}{(-\infty)^3} \to 0^-$$
d.h. f verläuft „ganz weit" links unterhalb der Asymptote a.
6. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f gerade und ungerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f nicht symmetrisch bezüglich der y-Achse oder dem Koordinatenursprung.
7. Die Quotientenregel oder der Befehl

```
D[8 / ((x^2 - 4) (x + 4)), {x, n}]
```

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2$ für die ersten zwei Ableitungen) liefern
$$f'(x) = -8\,\frac{3\,x^2 + 8\,x - 4}{(x^2-4)^2\,(x+4)^2}$$
und
$$f''(x) = 32\,\frac{3\,x^4 + 16\,x^3 + 18\,x^2 + 40}{(x^2-4)^3\,(x+4)^3}.$$
Der Befehl

```
Solve[3 x^4 + 16 x^3 + 18 x^2 + 40 = 0, x]
```

liefert nur vier komplexe Zahlen als Lösung, d.h. es gibt kein reeles x für welches $f''(x) = 0$ gilt. Somit hat die Funktion f keinen Wendepunkt und man kann sich die Berechnung der dritten Ableitung f''' sparen.
8. Der Befehl

```
Solve[3 x^2 + 8 x - 4 = 0, x]
```

auf www.wolframalpha.com liefert die beiden kritischen Punkte
$$x_3 \approx -3.0972 \quad \text{sowie} \quad x_4 \approx 0.43050$$
der Funktion f und die Befehle

```
8 / ((x^2 - 4) (x + 4)) /. x -> -3.0972
```

bzw.

```
8 / ((x^2 - 4) (x + 4)) /. x -> 0.43050
```

dienen zum Auswerten der Funktion f an den kritischen Punkten und ergeben

$$y_3 = f(x_3) \approx 1.58446 \quad \text{sowie} \quad y_4 = f(x_4) \approx -0.473348.$$

Wie man sieht, wird die Rechnung selbst mit Hilfe eines Mathematikprogramms schnell sehr aufwändig und daher sparen wir uns das Einsetzen der kritischen Punkte x_3 und x_4 in die 2. Ableitung f''. Man könnte dadurch zeigen, dass mit

$$T(-3.1\,;\,1.6) \quad \text{und} \quad H(0.43\,;\,-0.47)$$

ein Tief- bzw. Hochpunkt existiert.