# 3 Funktionen diskutieren

## 3.1 Polynomfunktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.6 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x$
2. $f(x) = \frac{1}{27}\,\left(x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 26\right)$ mit $f(1) = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - 2\,x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x$ mit $f(2) = 0$

## 3.2 Gebrochenlineare Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.8 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \dfrac{2\,x + 4}{x - 2}$
2. $f(x) = \dfrac{3\,x - 6}{x + 1}$

## 3.3 Rationale Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.7 und 11 in der Formelsammlung. In den Arbeitsblättern zum dritten Semester gibt es sehr ausführliche Lösungen zu neun ähnlichen Aufgaben.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 8}{x - 4}$
2. $f(x) = \dfrac{0.5\,x^2 - x + 0.5}{x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
5. $f(x) = \dfrac{8}{(x^2 - 4)\,(x + 4)}$
6. $f(x) = ?$

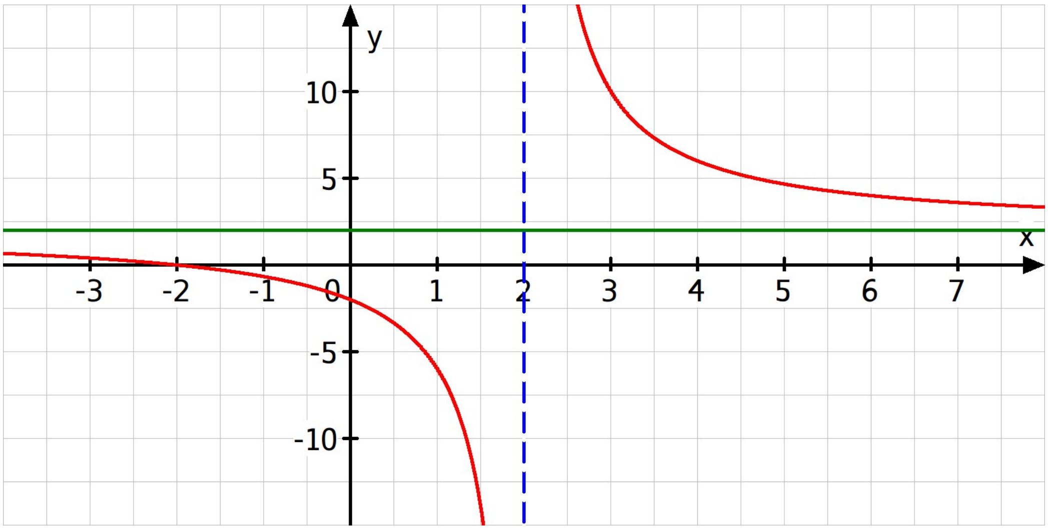
Die Nenner von solchen Ableitungen werden nie ausmultipliziert, da man Summen nicht kürzen kann!

## 3.2 Gebrochenlineare Funktionen (Lösungen)

### 3.2.1 Aufgabe 1 (Lösung)

$$f(x) = \frac{2\,x+4}{x-2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Mit $u(x) = 2\,(x+2) = 0$ gibt es bei $x_1 = -2$ eine Nullstelle mit VZW.
2. Mit $v(x) = x-2 = 0$ gibt es bei $x_2 = 2$ eine Polstelle mit VZW und es ist $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. Für den Schnittpunkt mit der $y$-Achse gilt $f(0) = -2$.
4. Eine Polynomdivision liefert
$$(2\,x+4) : (x-2) = 2 + \frac{8}{x-2},$$
d.h. es ist
$$a(x) = 2 \quad \text{und} \quad d(x) = \frac{8}{x-2} \approx \frac{8}{x},$$
wobei $a$ die Asymptote ist und die Vereinfachung von $d$ nur für $x \to \pm\infty$ gilt.
5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{8}{\infty} \to 0^+,$$
d.h. die Funktion $f$ verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote $a$. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{8}{(-\infty)} \to 0^-$$
d.h. $f$ verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote $a$.
6. Weil es nur eine Polstelle gibt, welche nicht auf der $y$-Achse liegt, kann die Funktion $f$ weder symmetrisch zur $y$-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.
7. Die Quotientenregel liefert
$$f'(x) = -\frac{8}{(x-2)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{16}{(x-2)^3},$$
d.h. wegen $f'(x) \neq 0$ und $f''(x) \neq 0$ hat die Funktion $f$ weder Extrema noch Wendepunkte.
8. Wegen
$$f'(x) = -\frac{8}{(x-2)^2}$$
gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$, d.h. der Graph hat überall eine negative Steigung.
9. Wegen
$$f''(x) = \frac{16}{(x-2)^3}$$
wechselt $f''(x)$ bei $x = 2$ das Vorzeichen und es gilt
$$x < 2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist rechtsgekrümmt}$$
bzw.
$$x > 2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist linksgekrümmt},$$
vergleiche die Zeichnung auf der nächsten Seite.




### 3.2.2 Aufgabe 2 (Lösung)

$$f(x) = \frac{3\,x-6}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

1. Mit $u(x) = 3\,(x-2) = 0$ gibt es bei $x_1 = 2$ eine Nullstelle mit VZW.
2. Mit $v(x) = x+1 = 0$ gibt es bei $x_2 = -1$ eine Polstelle mit VZW und es ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. Für den Schnittpunkt mit der $y$-Achse gilt $f(0) = -6$.
4. Eine Polynomdivision liefert
$$(3\,x-6) : (x+1) = 3 + \frac{-9}{x+1},$$
d.h. es ist
$$a(x) = 3 \quad \text{und} \quad d(x) = \frac{-9}{x+1} \approx \frac{-9}{x},$$
wobei $a$ die Asymptote ist und die Vereinfachung von $d$ nur für $x \to \pm\infty$ gilt.
5. Mit $d(x)$ gilt
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{-9}{\infty} \to 0^-,$$
d.h. die Funktion $f$ verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem unterhalb der Asymptote $a$. Es gilt auch
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad d(x) \approx \frac{-9}{(-\infty)} \to 0^+$$
d.h. $f$ verläuft „ganz weit“ links oberhalb der Asymptote $a$.
6. Weil es nur eine Polstelle gibt, welche nicht auf der $y$-Achse liegt, kann die Funktion $f$ weder symmetrisch zur $y$-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.
7. Die Quotientenregel liefert
$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{18}{(x+1)^3},$$
d.h. wegen $f'(x) \neq 0$ und $f''(x) \neq 0$ hat die Funktion $f$ weder Extrema noch Wendepunkte.
8. Wegen
$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2}$$
gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$, d.h. der Graph hat überall eine positive Steigung.

9. Wegen
$$f''(x) = -\frac{18}{(x+1)^3}$$
wechselt $f''(x)$ bei $x = -1$ das Vorzeichen und es gilt
$$x < -1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist linksgekrümmt}$$
bzw.
$$x > -1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist rechtsgekrümmt,}$$
vergleiche die Zeichnung.