3 Funktionen diskutieren

3.1 Polynomfunktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.6 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x$
2. $f(x) = \frac{1}{27}\,\left(x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 26\right)$ mit $f(1) = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - 2\,x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x$ mit $f(2) = 0$

3.2 Gebrochenlineare Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.8 und 11 in der Formelsammlung.

1. $f(x) = \dfrac{2\,x + 4}{x - 2}$
2. $f(x) = \dfrac{3\,x - 6}{x + 1}$

3.3 Rationale Funktionen

Siehe dazu die Abschnitte 8.7 und 11 in der Formelsammlung. In den Arbeitsblättern zum dritten Semester gibt es sehr ausführliche Lösungen zu neun ähnlichen Aufgaben.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 8}{x - 4}$
2. $f(x) = \dfrac{0.5\,x^2 - x + 0.5}{x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
5. $f(x) = \dfrac{8}{(x^2 - 4)\,(x + 4)}$
6. $f(x) = ?$

Die Nenner von solchen Ableitungen werden nie ausmultipliziert, da man Summen nicht kürzen kann!

3.1 Polynomfunktionen (Lösungen)

3.1.1 Aufgabe 1 (Lösung)

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x$$

1. Wegen
$$f(x) = \frac{1}{3}\,x\,\left(x^2 - 27\right) = \frac{1}{3}\,x\,\left(x + 3\sqrt{3}\right)\,\left(x - 3\sqrt{3}\right) = 0$$
hat f drei Nullstellen mit VZW bei $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 3\sqrt{3} \approx \pm 5.2$.

2. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstelle x_1 sind identisch.

3. Es gilt $a(x) = \frac{1}{3}\,x^3$ für die Asymptote.

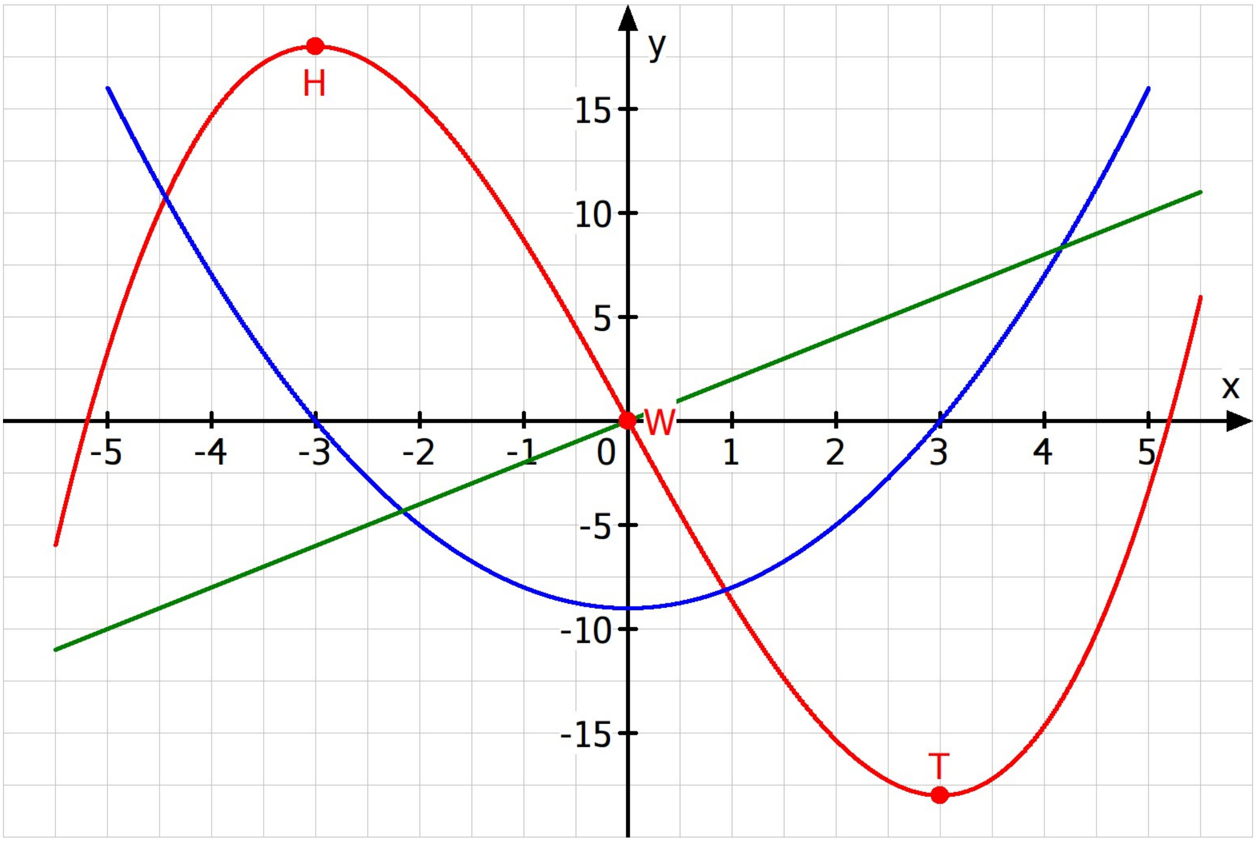
4. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f ausschliesslich ungerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f symmetrisch bezüglich dem Koordinatenursprung.

5. Wegen
$$f'(x) = x^2 - 9 = (x+3)\,(x-3) = 0$$
hat f zwei kritische Punkte bei $x_{4,5} = \pm 3$. Mit $f''(x) = 2\,x$ und $f(x_n) = y_n$ gilt
$$f''(-3) = 2 \cdot (-3) < 0 \quad \wedge \quad f(-3) = 18 \quad \Rightarrow \quad H(-3\,;\,18)$$
und
$$f''(3) = 2 \cdot 3 > 0 \quad \wedge \quad f(3) = -18 \quad \Rightarrow \quad T(3\,;\,-18),$$
d.h. die Funktion f hat einen Tiefpunkt T (Minimum) und einen Hochpunkt H (Maximum).

6. Wegen
$$f''(x) = 2\,x = 0$$
hat f' einen kritischen Punkt bei $x_6 = 0$. Mit $f'''(x) = 2$ und $f(x_n) = y_n$ gilt
$$f'''(0) = 2 \neq 0 \quad \wedge \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0\,;\,0),$$
d.h. die Funktion hat einen Wendepunkt.

7. Wegen
$$f'(x) = x^2 - 9$$
wechselt $f'(x)$ bei $x = \pm 3$ das Vorzeichen und es gilt
$$|x| > 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph hat positive Steigung}$$
$$|x| < 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 9 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph hat negative Steigung}$$

8. Wegen
$$f''(x) = 2\,x$$
wechselt $f''(x)$ bei $x = 0$ das Vorzeichen und es gilt
$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist rechtsgekrümmt}$$
bzw.
$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist linksgekrümmt},$$
vergleiche die Zeichnung auf der nächsten Seite.



Funktion f sowie 1. Ableitung f′ und 2. Ableitung f″

Man sieht sehr schön, dass die Extrema und die Wendepunkte genau dort liegen, wo die 1. bzw. 2. Ableitung ihre Nullstellen haben.

3.1.2 Aufgabe 2 (Lösung)

$$f(x) = \frac{1}{27}\left(x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 26\right)$$

1. Wegen $f(1) = 0$ hat f eine Nullstelle bei $x_1 = 1$ womit der Linearfaktor $(x-1)$ abgespalten werden kann. Eine Polynomdivision liefert

   $$\left(x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 26\right) : (x-1) = x^2 - 2\,x - 26,$$

   d.h. es gilt

   $$f(x) = \frac{1}{27}\,(x-1)\,\left(x^2 - 2\,x - 26\right)$$

   und weil die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks $x^2 - 2\,x - 26$ mit

   $$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-26) = 4 + 4 \cdot 26 = 4\,(1+26) = 4 \cdot 27 = 4 \cdot 9 \cdot 3$$

   positiv ist, ergeben sich durch

   $$x_{2,3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 1 \pm 3\,\sqrt{3}$$

   zwei weitere Nullstellen bei $x_2 \approx 6.2$ und $x_3 \approx -4.2$. Damit kann man f vollständig und gemäss

   $$f(x) = \frac{1}{27}\,(x-1)\,\left(x - 1 + 3\,\sqrt{3}\right)\,\left(x - 1 - 3\,\sqrt{3}\right)$$

   in Linearfaktoren zerlegen und es handelt sich bei allen drei Nullstellen um solche mit VZW.

2. Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt $f(0) = \frac{26}{27} \approx 1$.

3. Es gilt $a(x) = \frac{1}{27}\,x^3$ für die Asymptote.

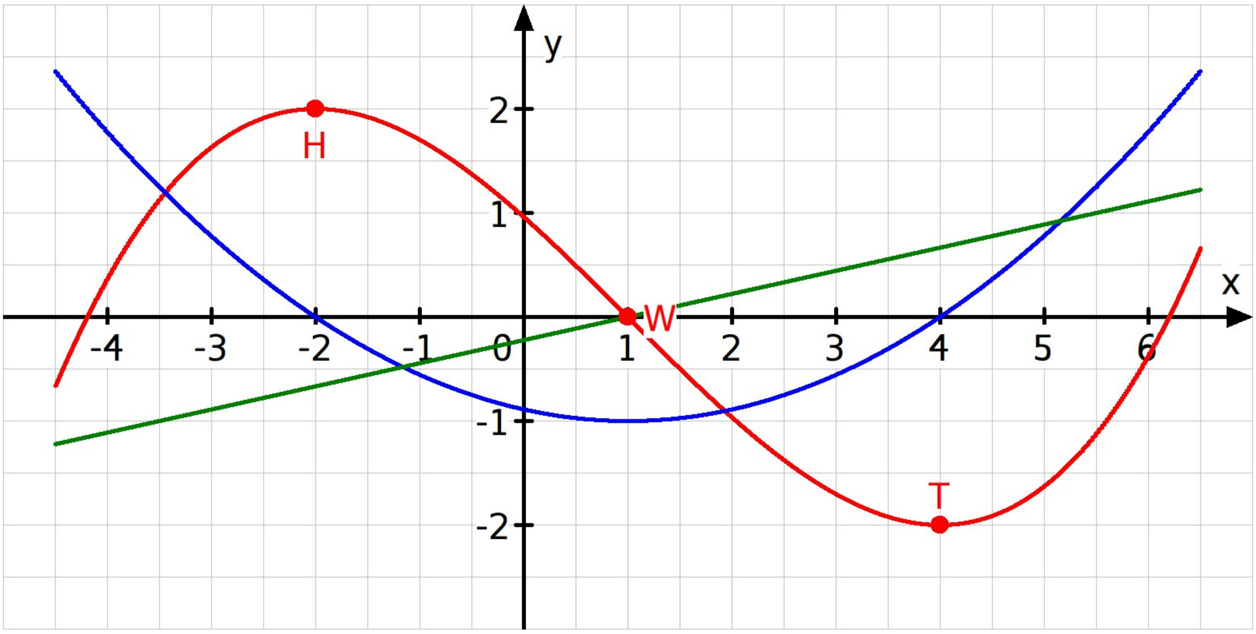
4. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f gerade und ungerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f nicht symmetrisch bezüglich der y-Achse oder dem Koordinatenursprung.

5. Wegen
$$f'(x) = \frac{1}{27}\left(3\,x^2 - 6\,x - 24\right) = \frac{1}{9}\left(x^2 - 2\,x - 8\right) = \frac{1}{9}\,(x-4)\,(x+2) = 0$$
hat f zwei kritische Punkte bei $x_4 = -2$ und $x_5 = 4$. Mit
$$f''(x) = \frac{1}{9}\,(2\,x-2) = \frac{2}{9}\,(x-1) \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$
gilt
$$f''(-2) = \frac{2}{9}\,(-2-1) < 0 \quad \wedge \quad f(-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad H(-2\,;\,2)$$
und
$$f''(4) = \frac{2}{9}\,(4-1) > 0 \quad \wedge \quad f(4) = -2 \quad \Rightarrow \quad T(4\,;\,-2),$$
d.h. die Funktion f hat zwei Extrema, davon einen Tiefpunkt T (Minimum) und einen Hochpunkt H (Maximum).

6. Wegen
$$f''(x) = \frac{2}{9}\,(x-1) = 0$$
hat f' einen kritischen Punkt bei $x_6 = 1$. Mit
$$f'''(x) = \frac{2}{9} \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$
gilt
$$f'''(0) = \frac{2}{9} \neq 0 \quad \wedge \quad f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(1\,;\,0),$$
d.h. die Funktion hat einen Wendepunkt.

7. Wegen
$$f'(x) = \frac{1}{9}\,(x-4)\,(x+2)$$
wechselt $f'(x)$ bei $x = -2$ und $x = 4$ das Vorzeichen und es gilt
$$x < -2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph hat positive Steigung}$$
$$-2 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph hat negative Steigung}$$
$$x > 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph hat positive Steigung}$$

8. Wegen
$$f''(x) = \frac{2}{9}\,(x-1)$$
wechselt $f''(x)$ bei $x = 1$ das Vorzeichen und es gilt
$$x < 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist rechtsgekrümmt}$$
bzw.
$$x > 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Graph ist linksgekrümmt,}$$
vergleiche die Zeichnung auf der nächsten Seite.



Funktion f sowie 1. Ableitung f′ und 2. Ableitung f″

Man sieht sehr schön, dass die Extrema und die Wendepunkte genau dort liegen, wo die 1. bzw. 2. Ableitung ihre Nullstellen haben.

3.1.3 Aufgabe 3 (Lösung)

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - 2\,x^2$$

1. Wegen
$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^2\,\left(x^2 - 8\right) = \frac{1}{4}\,x^2\,\left(x + 2\sqrt{2}\right)\,\left(x - 2\sqrt{2}\right) = 0$$
hat f eine Nullstelle ohne VZW bei $x_1 = 0$ und zwei mit VZW bei $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.8$. Weil der Graph von f die x-Achse bei der Nullstelle ohne VZW nur berührt aber nicht schneidet, muss dort ein Extrema liegen.

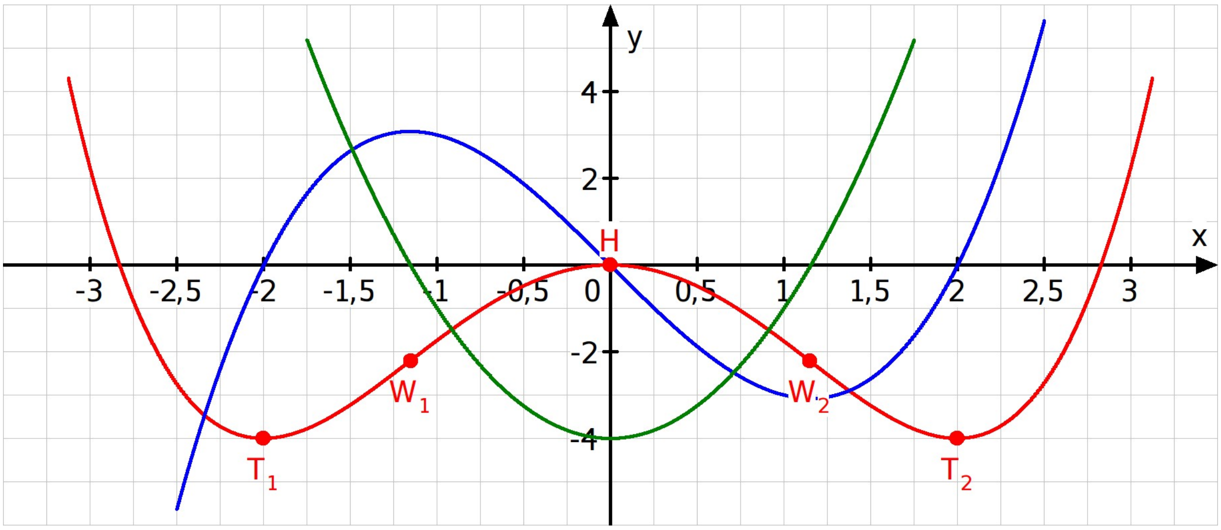
2. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstelle x_1 sind identisch.

3. Es gilt $a(x) = \frac{1}{4}\,x^4$ für die Asymptote.

4. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f ausschliesslich gerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f symmetrisch bezüglich der y-Achse.

5. Wegen
$$f'(x) = x^3 - 4\,x = x\,(x^2 - 4) = x\,(x + 2)\,(x - 2) = 0$$
hat f drei kritische Punkte bei $x_4 = 0$ und $x_{5,6} = \pm 2$. Mit
$$f''(x) = 3\,x^2 - 4 \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$
gilt
$$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad f(-2) = -4 \quad \Rightarrow \quad T_1(-2\,;\,-4),$$
$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 < 0 \quad \wedge \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(0\,;\,0)$$
und
$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad f(2) = -4 \quad \Rightarrow \quad T_2(2\,;\,-4),$$
d.h. die Funktion f hat drei Extrema, davon zwei Tiefpunkte T_1 und T_2 (Minima) sowie einen Hochpunkt H (Maximum), wobei jener mit der Nullstelle bei x_1 identisch ist.

6. Wegen
$$f''(x) = 3\,x^2 - 4 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 3\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0$$
hat f' zwei kritische Punkte bei $x_7 \approx -1.2$ und $x_8 \approx 1.2$. Mit
$$f'''(x) = 6\,x \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$
gilt
$$f'''(-1.2) \approx 6 \cdot (-1.2) \neq 0 \quad \wedge \quad f(-1.2) \approx -2.2 \quad \Rightarrow \quad W_1(-1.2\,;\,-2.2)$$
und
$$f'''(1.2) \approx 6 \cdot 1.2 \neq 0 \quad \wedge \quad f(1.2) \approx -2.2 \quad \Rightarrow \quad W_2(1.2\,;\,-2.2),$$
d.h. die Funktion hat zwei Wendepunkte.



Funktion f sowie 1. Ableitung f′ und 2. Ableitung f″

Man sieht sehr schön, dass die Extrema und die Wendepunkte genau dort liegen, wo die 1. bzw. 2. Ableitung ihre Nullstellen haben.

3.1.4 Aufgabe 4 (Lösung)

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x$$

1. Weil man ein x ausklammern kann und wegen $f(2) = 0$ hat f zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Eine Polynomdivision liefert
$$\left(\frac{1}{4}\,x^3 - x^2 - \frac{1}{2}\,x + 3\right) : (x-2) = \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2},$$
d.h. es gilt
$$f(x) = \frac{1}{4}\,x\,(x-2)\,(x^2 - 2\,x - 6)$$
und weil die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks $x^2 - 2\,x - 6$ mit
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 28 = 4 \cdot 7$$
positiv ist, ergeben sich durch
$$x_{3,4} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2 \cdot \sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

zwei weitere Nullstellen bei $x_3 \approx 3.6$ und $x_4 \approx -1.6$. Damit kann man f vollständig und gemäss

$$f(x) = \frac{1}{4}\, x\,(x-2)\,\left(x-1+\sqrt{7}\right)\,\left(x-1-\sqrt{7}\right)$$

in Linearfaktoren zerlegen und es handelt sich bei allen vier Nullstellen um solche mit VZW.

2. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstelle x_1 sind identisch.

3. Es gilt $a(x) = \frac{1}{4}\, x^4$ für die Asymptote.

4. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f gerade und ungerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f nicht symmetrisch bezüglich der y-Achse oder dem Koordinatenursprung.

5. Wegen

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 3\,x^2 - x + 3 = x^2\,(x-3) - 1\,(x-3) \\ &= (x^2-1)\,(x-3) = (x+1)\,(x-1)\,(x-3) = 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^3 - 3\,x^2 - x + 3 = x^2\,(x-3) - 1\,(x-3) = (x^2-1)\,(x-3) = (x+1)\,(x-1)\,(x-3) = 0$$

hat f drei kritische Punkte bei $x_{5,6} = \pm 1$ sowie $x_7 = 3$. Mit

$$f''(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 1 \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$

gilt

$$f''(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) - 1 > 0 \quad \wedge \quad f(-1) = -2.25 \quad \Rightarrow \quad T_1(-1\,;\,-2.25),$$

$$f''(1) = 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 - 1 < 0 \quad \wedge \quad f(1) = 1.75 \quad \Rightarrow \quad H(1\,;\,1.75)$$

und

$$f''(3) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 - 1 > 0 \quad \wedge \quad f(3) = -2.25 \quad \Rightarrow \quad T_2(3\,;\,-2.25),$$

d.h. die Funktion f hat drei Extrema, davon zwei Tiefpunkte T_1 und T_2 (Minima) sowie einen Hochpunkt H (Maximum).

6. Wegen

$$f''(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 1 = 0$$

und weil die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks $3\,x^2 - 6\,x - 1$ mit

$$D = (-6)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1) = 48 = 16\cdot 3$$

positiv ist, gilt

$$x_{8,9} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm 4\cdot\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$$

und f' hat zwei kritische Punkte bei $x_8 \approx -0.15$ und $x_9 \approx 2.15$. Mit

$$f'''(x) = 6\,(x-1) \quad \text{und} \quad f(x_n) = y_n$$

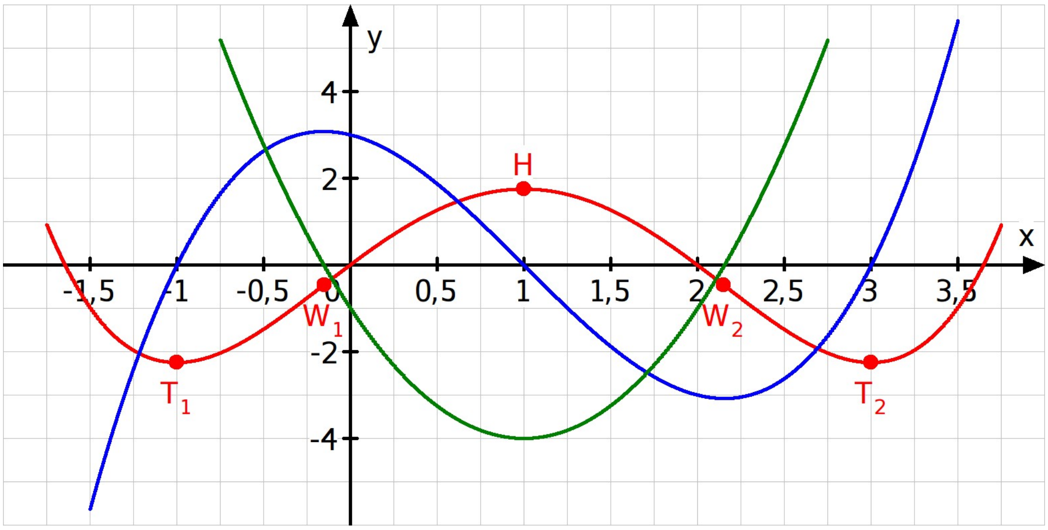
gilt

$$f'''(-0.15) \approx 6\,(-0.15-1) \neq 0 \quad \wedge \quad f(-0.15) \approx -0.46 \quad \Rightarrow \quad W_1(-0.15\,;\,-0.46)$$

und

$$f'''(2.15) \approx 6\,(2.15-1) \neq 0 \quad \wedge \quad f(2.15) \approx -0.46 \quad \Rightarrow \quad W_2(2.15\,;\,-0.46),$$

d.h. die Funktion hat zwei Wendepunkte.



Funktion f sowie 1. Ableitung f′ und 2. Ableitung f′′

Man sieht sehr schön, dass die Extrema und die Wendepunkte genau dort liegen, wo die 1. bzw. 2. Ableitung ihre Nullstellen haben.