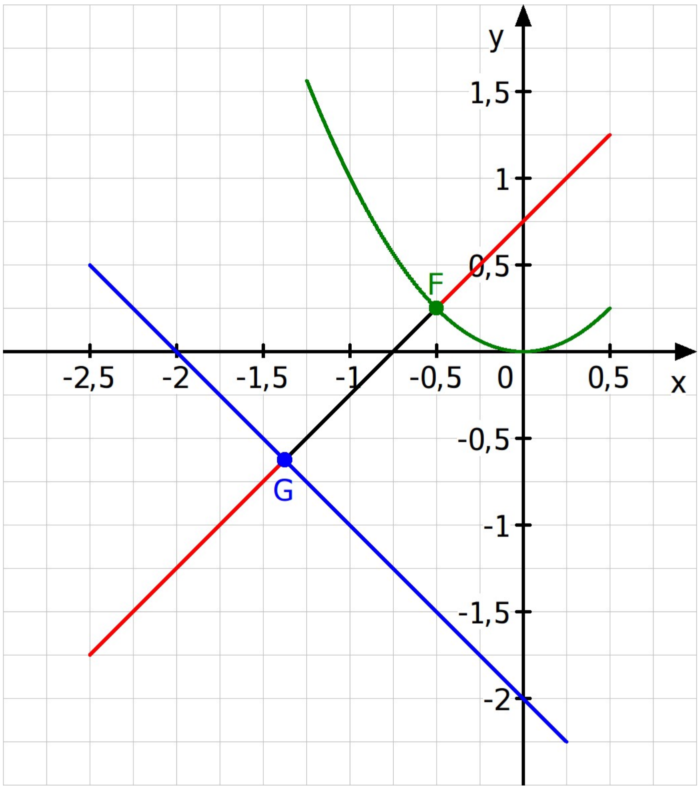
2.2 Abstände zwischen Graphen

Bei den folgenden Aufgaben soll ein Punkt F auf dem Graphen von f und ein Punkt G auf jenem von g so bestimmt werden, dass die Strecke $d = \overline{FG}$ möglichst kurz wird. Man erhält dadurch den kleinsten Abstand zwischen zwei gegebenen Graphen.

Beispiel:

$$g(x) = -x - 2 \quad \text{und} \quad f(x) = x^2$$



G auf g, F auf f und Abstand $d = \overline{FG}$ auf der Gerade n

Lösungsidee:

Ein kürzester Abstand $d = \overline{FG}$ muss von beiden Graphen rechtwinklig weg gehen, d.h. der Graph von f muss im Punkt F dieselbe Steigung wie die Gerade g haben, es gilt dort $g'(x) = f'(x)$. Da die Geraden g und n rechtwinklig (normal) zu einander stehen, kann man von der Steigung m_g auf m_n schliessen. Ausserdem liegt der Punkt F auf der Gerade n, d.h. man kann auch den y-Achsenabschnitt b von n berechnen und damit ist

$$n(x) = m_n\, x + b$$

vollständig bestimmt. Der Punkt G kann als Schnittpunkt von g und n berechnet werden, es gilt dort $n(x) = g(x)$. Wenn man die beiden Punkte F und G kennt, liefert Pythagoras den gesuchten Abstand d.

Aufgaben:

1. $g(x) = x - 2 \quad \text{und} \quad f(x) = x^2$
2. $g(x) = -4\,x - 18 \quad \text{und} \quad f(x) = 2\,(x+3)^2 - 1$
3. $g(x) = \frac{1}{2}\,x + 3 \quad \text{und} \quad f(x) = \sqrt{x}$
4. $g(x) = 3\,x + 7 \quad \text{und} \quad f(x) = x^3 - 2$

2.3 Abstände zwischen Graphen (Lösungen)

1. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x_F = \frac{1}{2}$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = \frac{1}{4} \quad \text{sowie} \quad F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$$

für den Anfangsspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ und weil F auf n liegt gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -x + b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -x + \frac{3}{4}$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-x + \frac{3}{4} = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = \frac{11}{8}$$

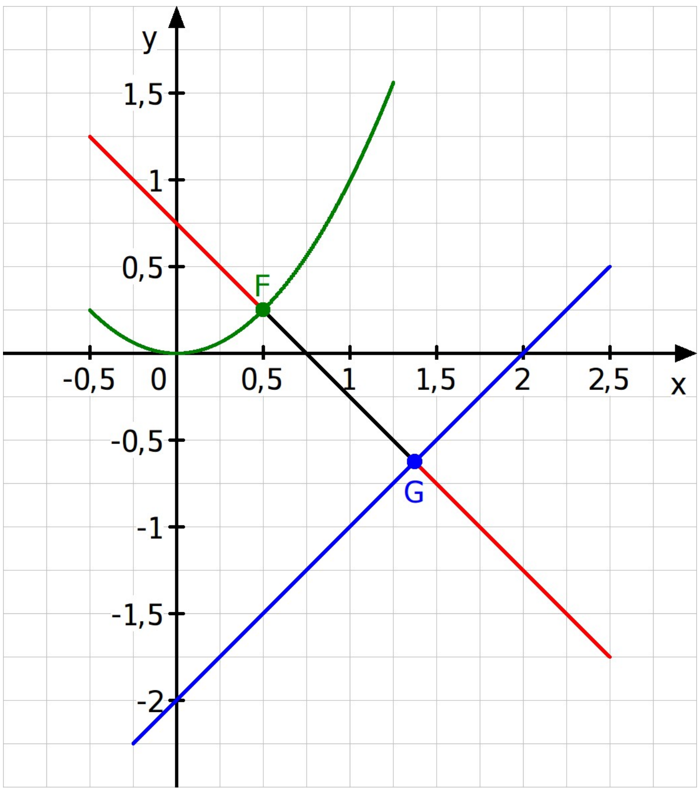
und damit

$$y_G = g(x_G) = -\frac{5}{8} \quad \text{sowie} \quad G\left(\frac{11}{8}\,;\,-\frac{5}{8}\right)$$

für den Endpunkt G der Strecke d. Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{2}\,\frac{7}{8} \approx 1.24$$

die gesuchte Länge.



2. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-4 = 4\,x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x_F = -4$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = 1 \quad \text{sowie} \quad F\,(-4\,;\,1)$$

für den Anfangsspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ und weil F auf n liegt gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}\,x + b \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4}\,(-4) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = \frac{1}{4}\,x + 2$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$\frac{1}{4}\,x + 2 = -4\,x - 18 \quad \Leftrightarrow \quad x_G \approx -4.71$$

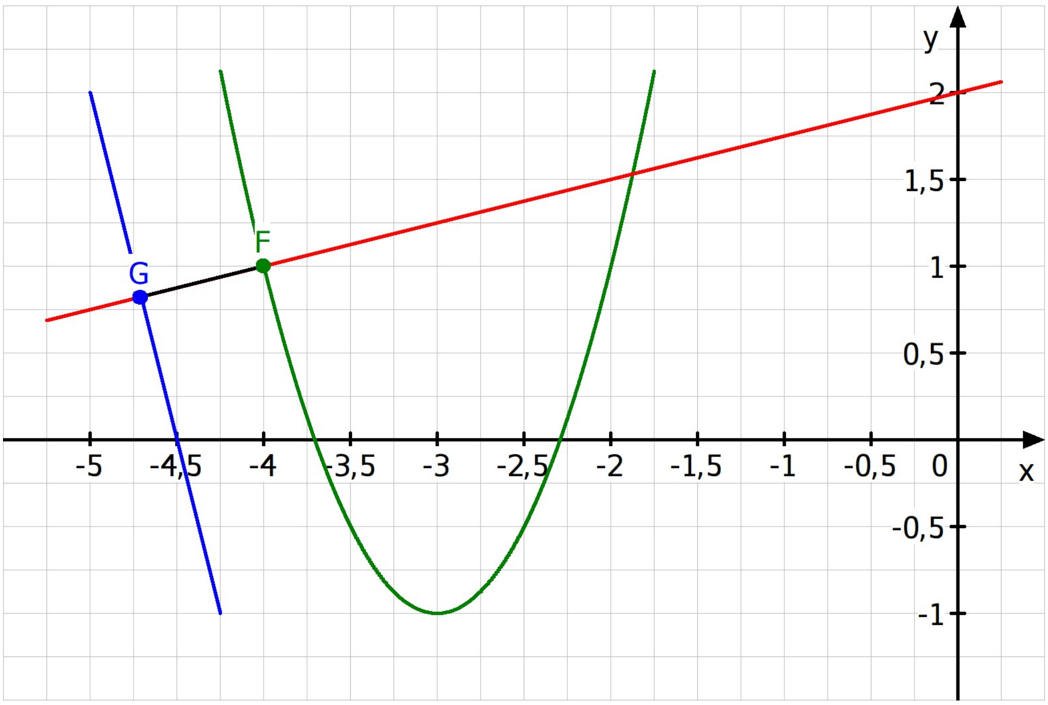
und damit

$$y_G = g(x_G) = 0.82 \quad \text{sowie} \quad G\,(-4.71\,;\,0.82)$$

für den Endpunkt G der Strecke d. Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} \approx 0.728$$

die gesuchte Länge.



3. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_F = 1$$

und damit

$$y_F = f(x_F) = 1 \quad \text{sowie} \quad F\,(1\,;\,1)$$

für den Anfangsspunkt F der Strecke d. Wegen $n \perp g$ und weil F auf n liegt gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{0.5} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2\,x + b \quad \Rightarrow \quad 1 = -2 \cdot 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -2\,x + 3$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-2\,x + 3 = \frac{1}{2}\,x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = 0$$

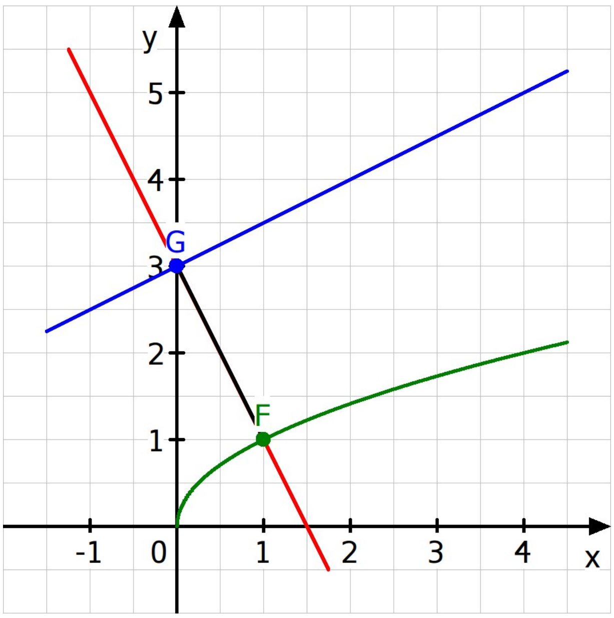
und damit

$$y_G = g(x_G) = 3 \quad \text{sowie} \quad G\,(0\,;\,3)$$

für den Endpunkt G der Strecke d. Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

die gesuchte Länge.



4. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$3 = 3\,x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{F_{1,2}} = \mp 1$$

und damit (weil F_2 nicht relevant ist)

$$y_{F_1} = f(x_{F_1}) = -3 \quad \text{sowie} \quad F_1\,(-1\,;\,-3)$$

für den Anfangsspunkt F_1 der Strecke d. Wegen $n \perp g$ und weil F_1 auf n liegt gilt

$$m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}\,x + b \quad \Rightarrow \quad -3 = -\frac{1}{3}\,(-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{10}{3}$$

und damit die Zuordnungsvorschrift

$$n(x) = -\frac{1}{3}\,x - \frac{10}{3}$$

für die Gerade n. Wegen $n(x) = g(x)$ erhält man

$$-\frac{1}{3}\,x - \frac{10}{3} = 3\,x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x_G = -3.1$$

und damit

$$y_G = g(x_G) = -2.3 \quad \text{sowie} \quad G\,(-3.1\,;\,-2.3)$$

für den Endpunkt G der Strecke d. Pythagoras liefert sodann mit

$$d = \sqrt{(x_G - x_{F_1})^2 + (y_G - y_{F_1})^2} \approx 2.21$$

die gesuchte Länge.