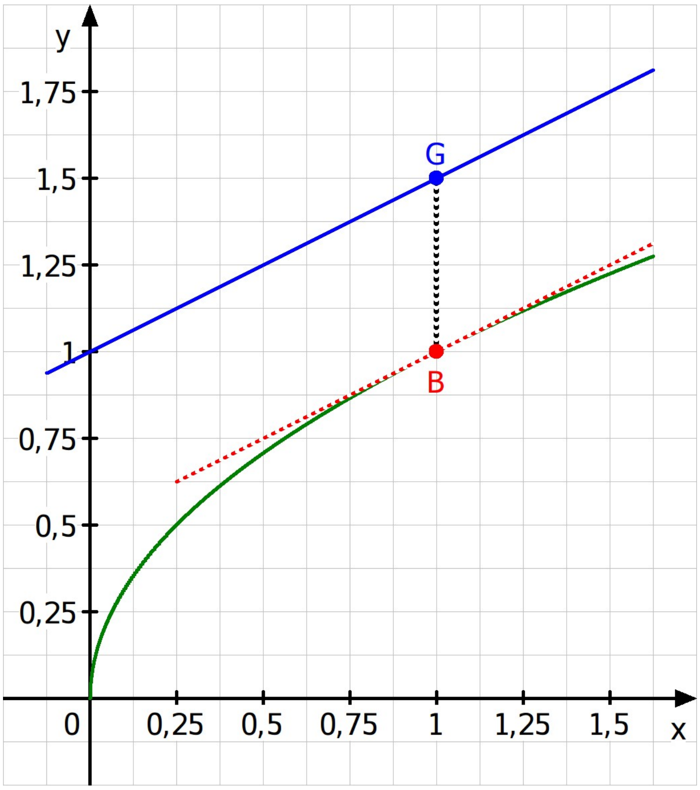
2 Anwendungen Differenzieren

2.1 Geraden verschieben

Bei den folgenden Aufgaben soll untersucht werden, um wieviel man die Gerade g in y-Richtung verschieben muss, damit sie den Graphen von f berührt, d.h. man bestimmt ein Δy. Ausserdem sollen die Koordinaten von diesem Berührungspunkt B auf dem Graphen von f berechnet werden.

Beispiel:

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{und} \quad f(x) = \sqrt{x}$$



Gerade g, Funktion f und Berührungspunkt B

Lösungsidee:

Wenn man eine Gerade g verschiebt, so dass sie den Graphen einer Funktion f in einem Punkt B berührt, so müssen in diesem Punkt B die Steigungen der beiden Funktionen übereinstimmen, d.h. es muss dort $g'(x) = f'(x)$ gelten. Diesen Umstand nützt man aus, um zuerst die Koordinaten x_B und $y_B = f(x_B)$ von B zu bestimmen. Mit Hilfe von x_B bestimmt man ausserdem einen Punkt G mit $y_G = g(x_B)$, welcher auf der Gerade g und genau über oder unter dem Punkt B liegt. Die Differenz $\Delta y = y_B - y_G$ stellt dann die gesuchte Verschiebung dar, wobei g für $\Delta y > 0$ nach oben bzw. für $\Delta y < 0$ nach unten verschoben werden muss.

Aufgaben:

1. $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ und $f(x) = x^2$
2. $g(x) = -\frac{1}{4}x$ und $f(x) = -\sqrt{x} + 1$
3. $g(x) = 12x + 1$ und $f(x) = x^3$
4. $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ und $f(x) = \sqrt{x}$
5. $g(x) = -x + 2$ und $f(x) = \frac{x+1}{x}$
6. $g(x) = \frac{1}{6}x + 2$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2.1 Geraden verschieben (Lösungen)

1. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{3}{2} = 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \frac{3}{4}$$

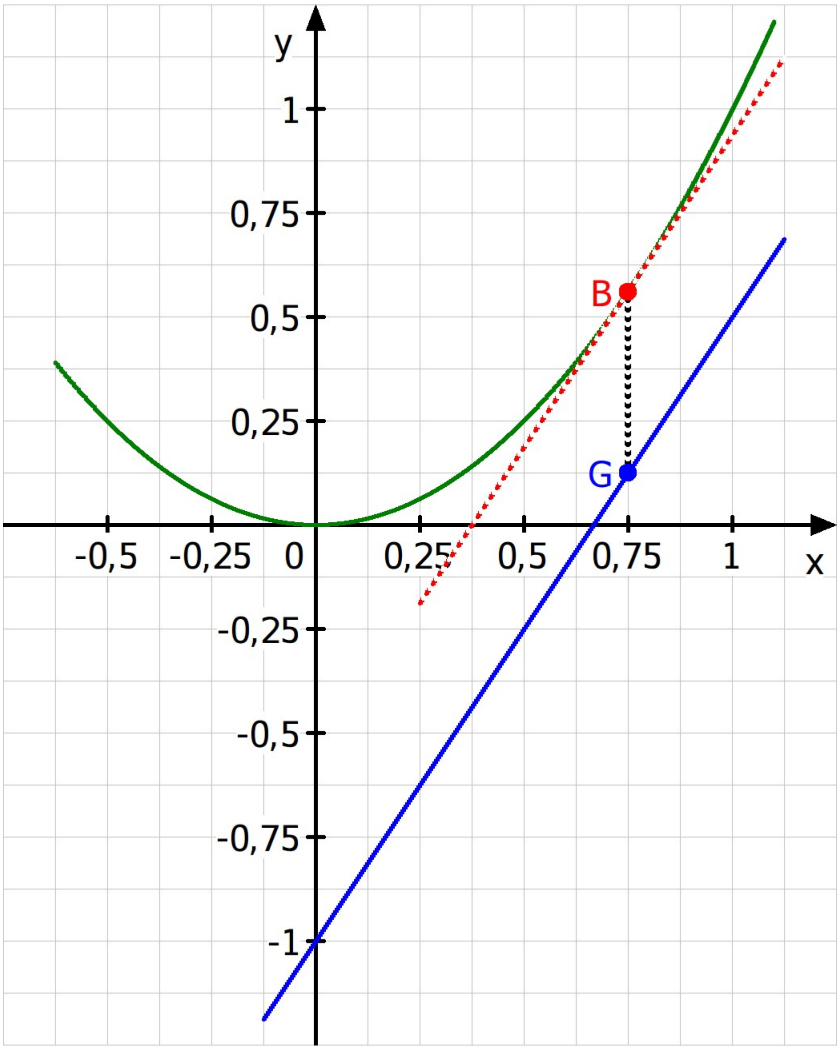
und damit

$$y_B = f(x_B) = \frac{9}{16} \quad \text{sowie} \quad B\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{9}{16}\right)$$

für den Berührungspunkt B auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = y_B - y_G = \frac{9}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16} \approx 0.44,$$

d.h. die Gerade g wird um 0.44 nach oben verschoben.



2. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = 4$$

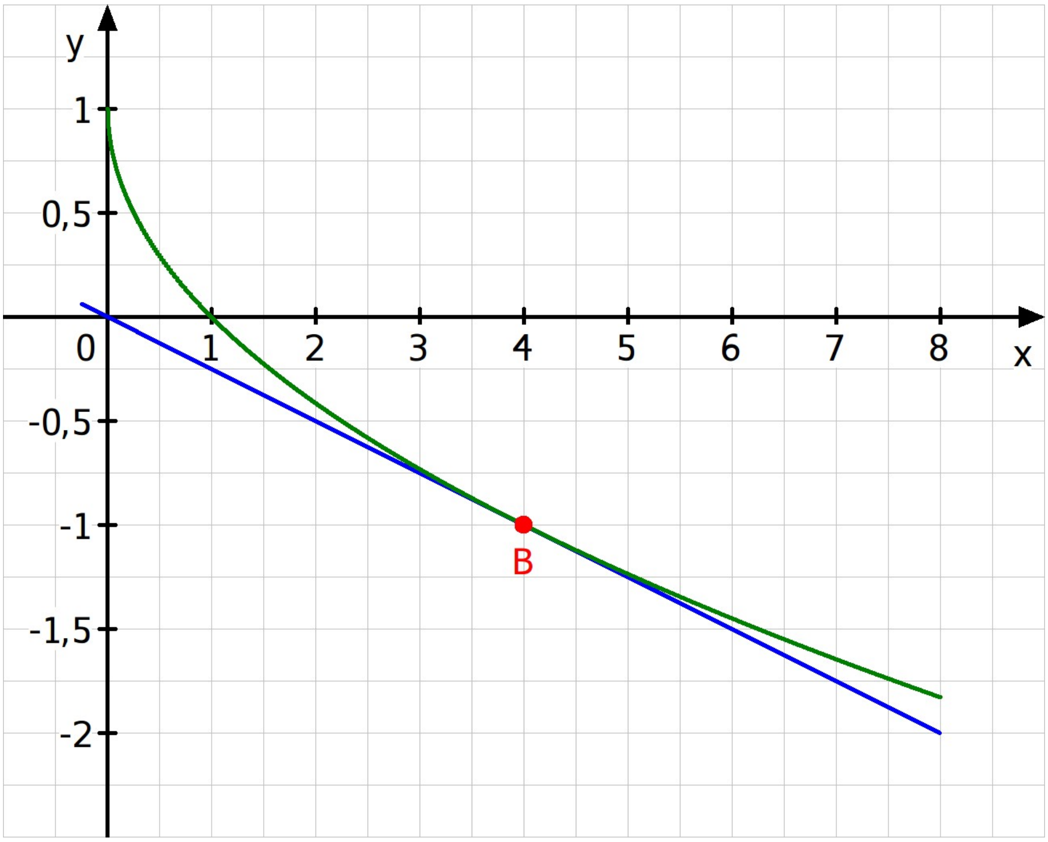
und damit

$$y_B = f(x_B) = -1 \quad \text{sowie} \quad B(4\,;\,-1)$$

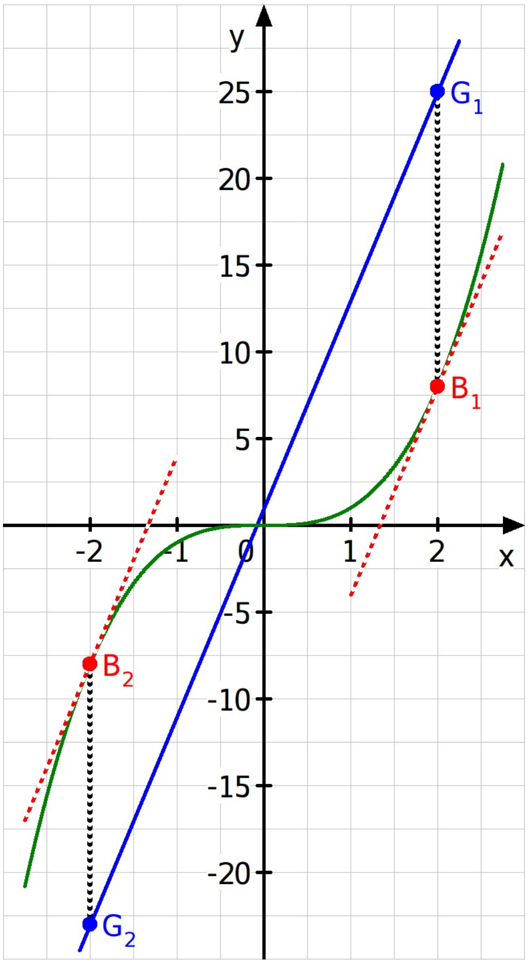
für den Berührungspunkt B auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt

$$y_G = g(x_B) = -1 \quad \Rightarrow \quad G\,(4\,;\,-1) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = y_B - y_G = -1 - (-1) = 0,$$

d.h. die Gerade g berührt den Graphen von f bereits und muss nicht verschoben werden.



3. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man
$$12 = 3\,x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \pm 2$$
und damit
$$y_B = f(x_B) = \pm 8 \quad \text{sowie} \quad B_1(2\,;\,8) \quad \text{und} \quad B_2(-2\,;\,-8)$$
für die Berührungspunkte B_1 und B_2 auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt
$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = 25 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(2\,;\,25) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} = 8 - 25 = -17$$
sowie
$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = -23 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-2\,;\,-23) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} = -8 - (-23) = 15,$$
d.h. die Gerade g wird um 17 nach unten bzw. 15 nach oben verschoben.



4. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \frac{9}{4}$$
und damit
$$y_B = f(x_B) = \frac{3}{2} \quad \text{sowie} \quad B\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right)$$
für den Berührungspunkt B auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt
$$y_G = g(x_B) = \frac{19}{4} \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{19}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = y_B - y_G = \frac{3}{2} - \frac{19}{4} = -\frac{13}{4} = -3.25,$$
d.h. die Gerade g wird um 3.25 nach unten verschoben.

5. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$-1 = -\frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{B_{1,2}} = \pm 1$$

und damit

$$y_{B_1} = f(x_{B_1}) = 2 \quad \text{und} \quad y_{B_2} = f(x_{B_2}) = 0$$

bzw.

$$B_1(1\,;2) \quad \text{und} \quad B_2(-1\,;0)$$

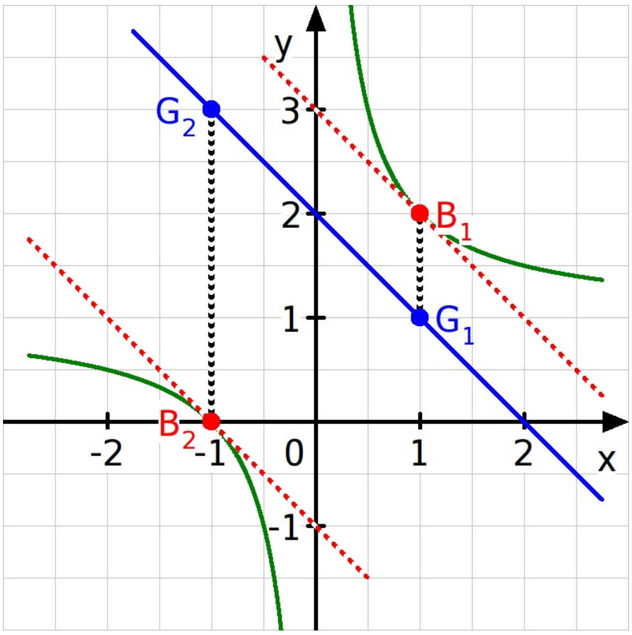
für die Berührungspunkte B_1 und B_2 auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt

$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(1\,;1) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} = 2 - 1 = 1$$

sowie

$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = 3 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-1\,;3) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} = 0 - 3 = -3,$$

d.h. die Gerade g wird um 1 nach oben bzw. 3 nach unten verschoben.



6. Wegen $g'(x) = f'(x)$ erhält man

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.8$$

und damit

$$y_B = f(x_B) = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.4 \quad \text{sowie} \quad B_1(2\sqrt{2}\,; \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad B_2(-2\sqrt{2}\,; -\sqrt{2})$$

für die Berührungspunkte B_1 und B_2 auf dem Graphen von f. Ausserdem gilt

$$y_{G_1} = g(x_{B_1}) = \frac{\sqrt{2}}{3} + 2 \approx 2.5 \quad \Rightarrow \quad G_1\,(2.8\,;2.5) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_1 = y_{B_1} - y_{G_1} \approx \sqrt{2} - 2.5 \approx -1.1$$

sowie

$$y_{G_2} = g(x_{B_2}) = \frac{-\sqrt{2}}{3} + 2 \approx 1.5 \quad \Rightarrow \quad G_2\,(-2.8\,;1.5) \quad \Rightarrow \quad \Delta y_2 = y_{B_2} - y_{G_2} \approx -\sqrt{2} - 1.5 \approx -2.9,$$

d.h. die Gerade g wird um 1.1 bzw. 2.9 nach unten verschoben.