

9.2 Aufgaben

Aufgabe 16.39 aus dem Buch.

1. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x}$

2. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x}$

3. $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{2x^3 - 8x}$

5. $f(x) = \frac{x^5 + 1}{5x^3 - 20x}$

6. $f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$

7. $f(x) = \frac{x^3 + 8}{8(x - 1)^2}$

8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

9. $f(x) = \frac{8x + 1}{x^4 + 1}$

9.2.1 Aufgabe für das 3. Semester

Diskutiere diese Funktionen nach dem folgenden Muster.

1. Bestimme Position und Art der Nullstelle(n).
2. Bestimme Position und Art der Polstelle(n).
3. Wie lautet der Definitionsbereich D von f ?
4. Wie gross ist $f(0)$, d.h. wo liegt der Schnittpunkt des Graphen mit der y -Achse?
5. Wie lautet die Zuordnungsvorschrift $a(x)$ für die Asymptote a ?
6. Wie lautet die Zuordnungsvorschrift $d(x)$ des echt gebrochenen Anteils d ?
7. Vereinfache $d(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. unter der Annahme, dass x „sehr gross“ ist.
8. Verläuft die Kurve für $x \rightarrow \pm\infty$ oberhalb oder unterhalb der Asymptote a ?
9. Löse die Gleichung $f(x) = a(x)$, um zu sehen, ob sich die Graphen von f und a schneiden.
10. Untersuche f auf Symmetrie zur y -Achse oder zum Ursprung des Koordinatensystems.
11. Ordne f einer Zeichnung aus dem Buch zu, oder noch besser, zeichne den Graphen von f .

Die Punkte 2 und 3 können zu einer Teilaufgabe zusammengefasst werden, ebenso die Punkte 5 bis 8, da sie thematisch zusammengehören.

9.2.2 Aufgabe für das 4. Semester

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können später noch folgende Punkte ergänzt werden.

1. Bestimme die ersten drei Ableitungen f' , f'' und f''' der Funktion f .
2. Bestimme mit Hilfe der Gleichung $f'(x) = 0$ evtl. vorhandene Maxima und Minima von f .
3. Bestimme mit Hilfe der Gleichung $f''(x) = 0$ evtl. vorhandene Wendepunkte von f .

Bei den meisten dieser Aufgaben muss man für das Berechnen der Ableitungen und das Lösen der daraus resultierenden Gleichungen ein Mathematikprogramm wie z.B. www.wolframalpha.com zu Hilfe nehmen, da die Berechnungen von Hand zu lange dauern oder gar nicht erst möglich sind. Im Kapitel 10 findest Du die dafür nötigen Befehle.

9.2.3 Aufgabe 1 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^4 + 1 \geq 1 \neq 0$ hat f keine Nullstellen.
2. Mit $N(x) = x(x^2 + 1) = 0$ und wegen $x^2 + 1 \geq 1 \neq 0$ hat f genau eine Polstelle mit VZW bei $x_1 = 0$.
3. Der Wert $f(0)$ existiert nicht wegen $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (x^4 + 1) : (x^3 + x) = x + \frac{-x^2 + 1}{x^3 + x}$$

und damit als Asymptote a die Gerade mit

$$a(x) = x$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^3 + x} \approx \frac{-x^2}{x^3} = \frac{-1}{x}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{-1}{\infty} \rightarrow 0^-,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem unterhalb der Asymptote a . Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{-1}{-\infty} \rightarrow 0^+$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ links oberhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x)$ der Funktion sowie $a(x)$ der Asymptote gleichsetzt, bekommt man $x_{2,3} = \pm 1$ und daraus die beiden Schnittpunkte

$$S_1(-1; -1) \quad \text{und} \quad S_2(1; 1).$$

7. Für das Zählerpolynom von f gilt

$$Z(x) = x^4 + 1 = (-x)^4 + 1 = Z(-x),$$

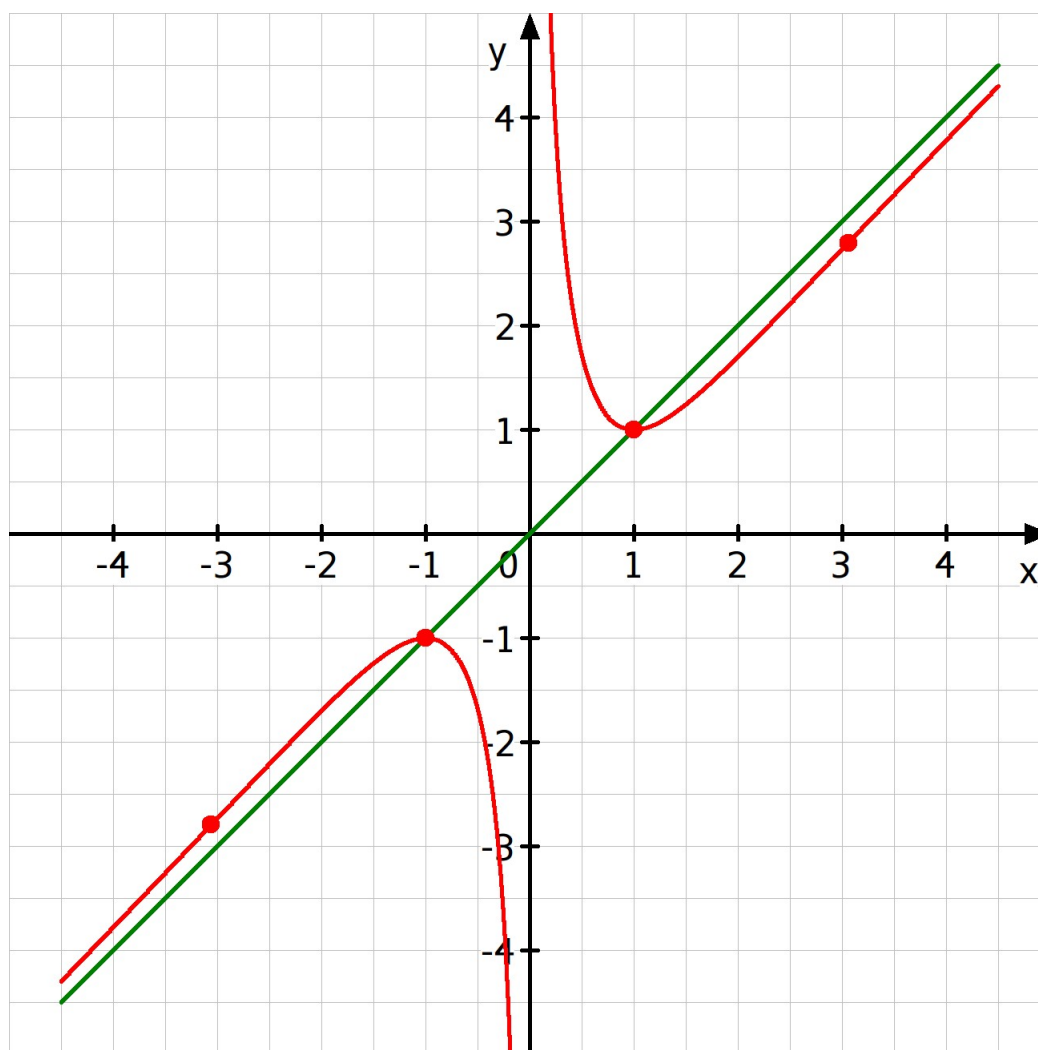
d.h. es ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. Für das Nennerpolynom gilt

$$N(x) = x^3 + x = -[-(x^3 + x)] = -[(-x)^3 + (-x)] = -N(-x),$$

d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Mit

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(-x)}{-N(-x)} = -\frac{Z(-x)}{N(-x)} = -f(-x)$$

ist der Graph der Funktion f ebenfalls symmetrisch bezüglich dem Ursprung, also punktsymmetrisch.

Funktion f aus Aufgabe 1

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Der Punkt $(-1; -1)$ ist ein lokales Maximum, da er in der dortigen Umgebung den höchsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Hochpunkt.
- Der Punkt $(1; 1)$ ist ein lokales Minimum, da er in der dortigen Umgebung den tiefsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Tiefpunkt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Extrema, d.h. Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstelle beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Die beiden Punkte $(-3.06; -2.79)$ und $(3.06; 2.79)$ nennt man Wendepunkte, weil dort die Kurve von links- auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt wechselt.
- Wie man die Koordinaten von Hoch-, Tief- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = (x^4 + 1)/(x^3 + x)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(x^4 + 1) / (x^3 + x), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2, 3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 1}{(x^3 + x)^2} = \frac{(x+1)(x-1)(x^4 + 4x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2x^6 + 18x^4 + 6x^2 + 2}{(x^3 + x)^3} = \frac{-2(x^6 - 9x^4 - 3x^2 - 1)}{x^3(x^2 + 1)^3}$$

und

$$f'''(x) = \frac{6(x^8 - 16x^6 - 4x^4 - 4x^2 - 1)}{x^4(x^2 + 1)^4}.$$

2. Den quadratischen Ausdruck $x^4 + 4x^2 + 1$ in f' kann man mit Hilfe der Substitution $z = x^2$ und wegen

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \quad \text{sowie} \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

zerlegen in

$$(x^2 + 2 + \sqrt{3})(x^2 + 2 - \sqrt{3}),$$

d.h. es gilt

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x^2 + 2 + \sqrt{3})(x^2 + 2 - \sqrt{3})}{x^2(x^2 + 1)^2}.$$

Mit $f'(x) = 0$ und wegen

$$x^2 + 2 + \sqrt{3} > 0 \quad \text{sowie} \quad x^2 + 2 - \sqrt{3} > 0$$

sind $x_{4,5} = \pm 1$ die einzigen kritischen Punkte von f . Es gilt

$$f(-1) = -1 \quad \wedge \quad f''(-1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(-1; -1)$$

und

$$f(1) = 1 \quad \wedge \quad f''(1) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(1; 1),$$

d.h. die Funktion hat zwei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[x^6 - 9x^4 - 3x^2 - 1 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_{6,7} \approx \pm 3.06$ als kritische Punkte von f' . Es gilt

$$f(-3.06) \approx -2.79 \quad \wedge \quad f'''(-3.06) \approx -0.0346 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(-3.06; -2.79)$$

und

$$f(3.06) \approx 2.79 \quad \wedge \quad f'''(3.06) \approx -0.0346 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(3.06; 2.79),$$

d.h. die Funktion hat genau zwei Wendepunkte.

9.2.4 Aufgabe 2 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$ hat f genau eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ womit der Linearfaktor $(x + 1)$ vom Zählerpolynom $Z(x)$ abgespalten werden kann. Eine Polynomdivision liefert

$$(x^3 + 1) : (x + 1) = x^2 - x + 1,$$

d.h. es gilt

$$Z(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

und weil die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks

$$x^2 - x + 1$$

mit $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ kleiner ist als Null, kann dieser nicht mehr weiter zerlegt werden. Damit hat f genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = -1$.

2. Mit $N(x) = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2) = 0$ hat f drei Polstellen mit VZW bei $x_2 = 0$ und $x_{3,4} = \pm 2$.
3. Der Wert $f(0)$ existiert nicht wegen $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (x^3 + 1) : (x^3 - 4x) = 1 + \frac{4x + 1}{x^3 - 4x}$$

und damit als Asymptote a die konstante Funktion mit

$$a(x) = 1$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{4x + 1}{x^3 - 4x} \approx \frac{4x}{x^3} = \frac{4}{x^2}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{4}{(\pm\infty)^2} \rightarrow 0^+,$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ rechts und links im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a .

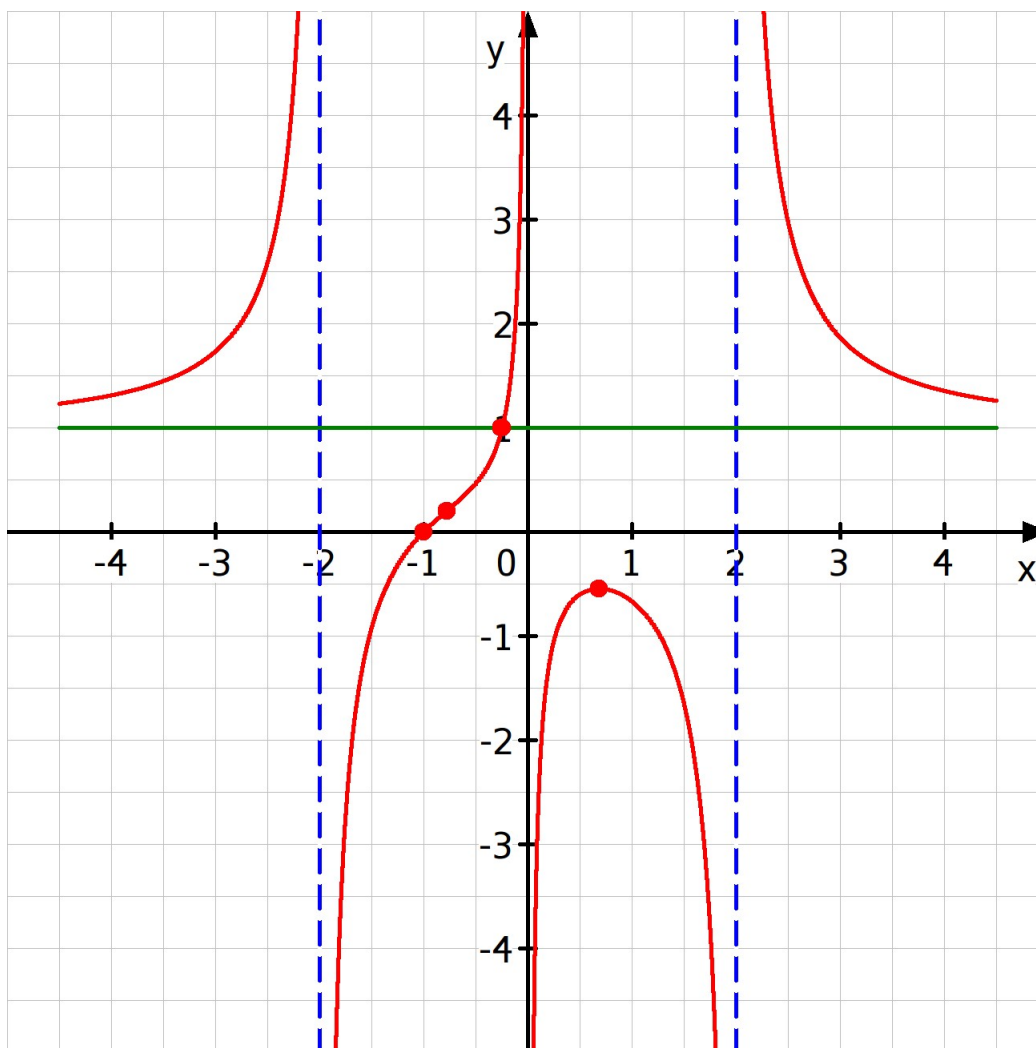
6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man $x_5 = -0.25$ und daraus den Schnittpunkt

$$S(-0.25; 1).$$

7. Für das Nennerpolynom gilt

$$N(x) = x^3 - 4x = -[-(x^3 - 4x)] = -[(-x)^3 - 4(-x)] = -N(-x),$$

d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Weil das Zählerpolynom von f weder symmetrisch zum Ursprung noch symmetrisch zur y -Achse ist, weist auch der Graph von f keine solchen Symmetrien auf.

Funktion f aus Aufgabe 2

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Bei $(0.687; -0.546)$ liegt ein lokales Maximum, auch Hochpunkt genannt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Extrema, d.h. Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstellen beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Bei $(-0.778; 0.200)$ liegt ein Wendepunkt, denn dort wechselt die Kurve ihre Krümmung.
- Wie man die Koordinaten von Hoch- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differentialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x} = (x^3 + 1)/(x^3 - 4x)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(x^3 + 1) / (x^3 - 4x), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in \{1, 2, 3\}$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{-8x^3 - 3x^2 + 4}{x^2(x^2 - 4)^2},$$

$$f''(x) = \frac{4(6x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8)}{x^3(x^2 - 4)^3}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{12(8x^7 + 5x^6 + 32x^5 - 10x^4 + 32x^2 - 32)}{x^4(x^2 - 4)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[-8x^3 - 3x^2 + 4 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_6 \approx 0.687$ als kritischen Punkt von f . Es gilt

$$f(0.687) \approx -0.546 \quad \wedge \quad f''(0.687) \approx -2.63 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(0.687; -0.546),$$

d.h. die Funktion f hat genau ein Extremum.

3. Mit $f''(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[6x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_7 \approx -0.778$ als kritischen Punkt von f' . Es gilt

$$f(-0.778) \approx 0.200 \quad \wedge \quad f'''(-0.778) \approx 6.34 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(-0.778; 0.200),$$

d.h. die Funktion hat genau einen Wendepunkt.

9.2.5 Aufgabe 3 (Lösung)

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = 4x^2 = 0$ hat f genau eine Nullstelle ohne VZW bei $x_1 = 0$.
2. Mit $N(x) = x^2 + 1 = 0$ und wegen $x^2 + 1 \geq 1 \neq 0$ hat f keine Polstelle, d.h. es gilt $D = \mathbb{R}$.
3. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y -Achse sowie die Nullstelle sind identisch.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = 4x^2 : (x^2 + 1) = 4 + \frac{-4}{x^2 + 1}$$

und damit als Asymptote a die konstante Funktion mit

$$a(x) = 4$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{-4}{x^2 + 1} \approx \frac{-4}{x^2}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{-4}{(\pm\infty)^2} \rightarrow 0^-,$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ rechts und links im Koordinatensystem unterhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man die Gleichung $0 = 4$, d.h. es gibt keine Schnittpunkte des Graphen von f mit der Asymptote a .
7. Wegen

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1} = 4 \frac{x^2}{x^2+1}$$

und

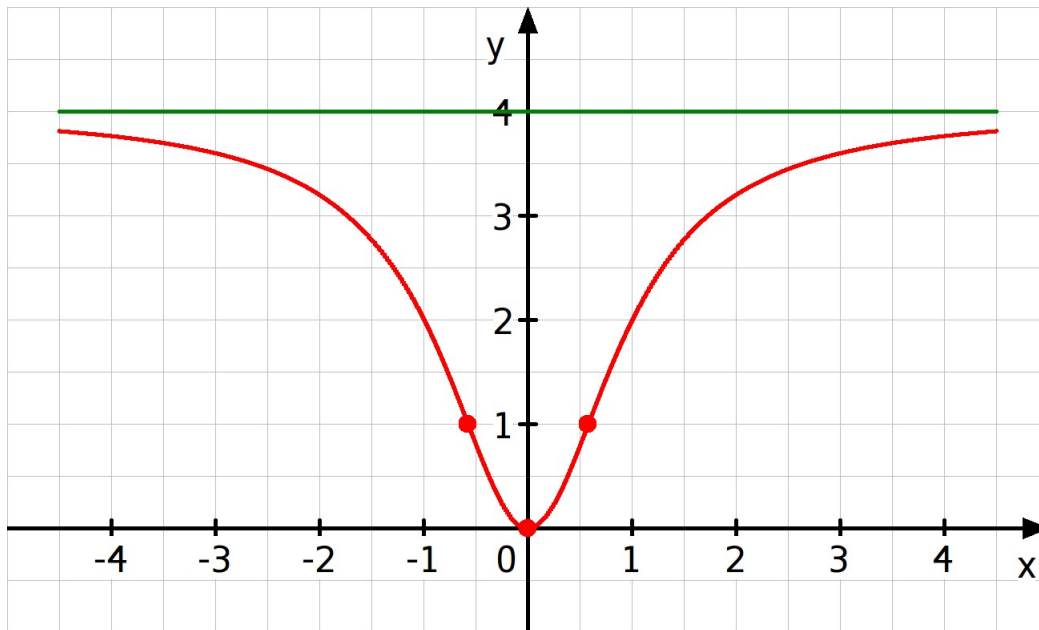
$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

gilt

$$0 \leq f(x) < 4,$$

d.h. der Wertebereich von f ist $y \in W = [0; 4[$.

8. Weil die Zuordnungsvorschrift der Funktion f ausschliesslich gerade Potenzen in x aufweist, ist der Graph von f symmetrisch bezüglich der y -Achse.

Funktion f aus Aufgabe 3

- Wie man sieht, muss der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a nicht schneiden.
- Der Punkt $(0; 0)$ ist ein globales Minimum, da er unabhängig von $x \in D$ den tiefsten Punkt des Graphen darstellt.
- Die beiden Punkte $(-0.577; 1)$ und $(0.577; 1)$ nennt man Wendepunkte, weil dort die Kurve von links- auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt wechselt.
- Wie man die Koordinaten von Tief- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1} = 4x^2 / (x^2 + 1)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[4x^2 / (x^2 + 1), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2, 3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f''(x) = -\frac{24(x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

und

$$f'''(x) = \frac{96x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ erhält man $x_1 = 0$ als kritischen Punkt von f , welcher zugleich Nullstelle ist. Es gilt

$$f(0) = 0 \quad \wedge \quad f''(0) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(0; 0),$$

d.h. die Funktion f hat genau ein Extremum.

3. Mit $f''(x) = 0$ erhält man

$$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.577$$

als kritische Punkte von f' . Es gilt

$$f(-0.577) \approx 1 \quad \wedge \quad f'''(-0.577) \approx -11.7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(-0.577; 1)$$

und

$$f(0.577) \approx 1 \quad \wedge \quad f'''(0.577) \approx 11.7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(0.577; 1),$$

d.h. die Funktion hat genau zwei Wendepunkte.

9.2.6 Aufgabe 4 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{2x^3 - 8x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ und wegen $x^2 + 1 \geq 1 \neq 0$ hat f je eine Nullstelle mit VZW bei $x_{1,2} = \pm 1$.
2. Mit $N(x) = 2x(x^2 - 4) = 2x(x + 2)(x - 2) = 0$ hat f drei Polstellen mit VZW bei $x_3 = 0$ und $x_{4,5} = \pm 2$.
3. Der Wert $f(0)$ existiert nicht wegen $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (x^4 - 1) : (2x^3 - 8x) = \frac{1}{2}x + \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 8x}$$

und damit als Asymptote a die Ursprungsgerade (lineare Funktion) mit

$$a(x) = \frac{1}{2}x$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 8x} \approx \frac{4x^2}{2x^3} = \frac{2}{x}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{2}{\infty} \rightarrow 0^+,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a . Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{2}{-\infty} \rightarrow 0^-$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man $x_{6,7} = \pm 0.5$ und daraus die beiden Schnittpunkte

$$S_1(-0.5; -0.25) \quad \text{und} \quad S_2(0.5; 0.25).$$

7. Für das Zählerpolynom von f gilt

$$Z(x) = x^4 - 1 = (-x)^4 - 1 = Z(-x),$$

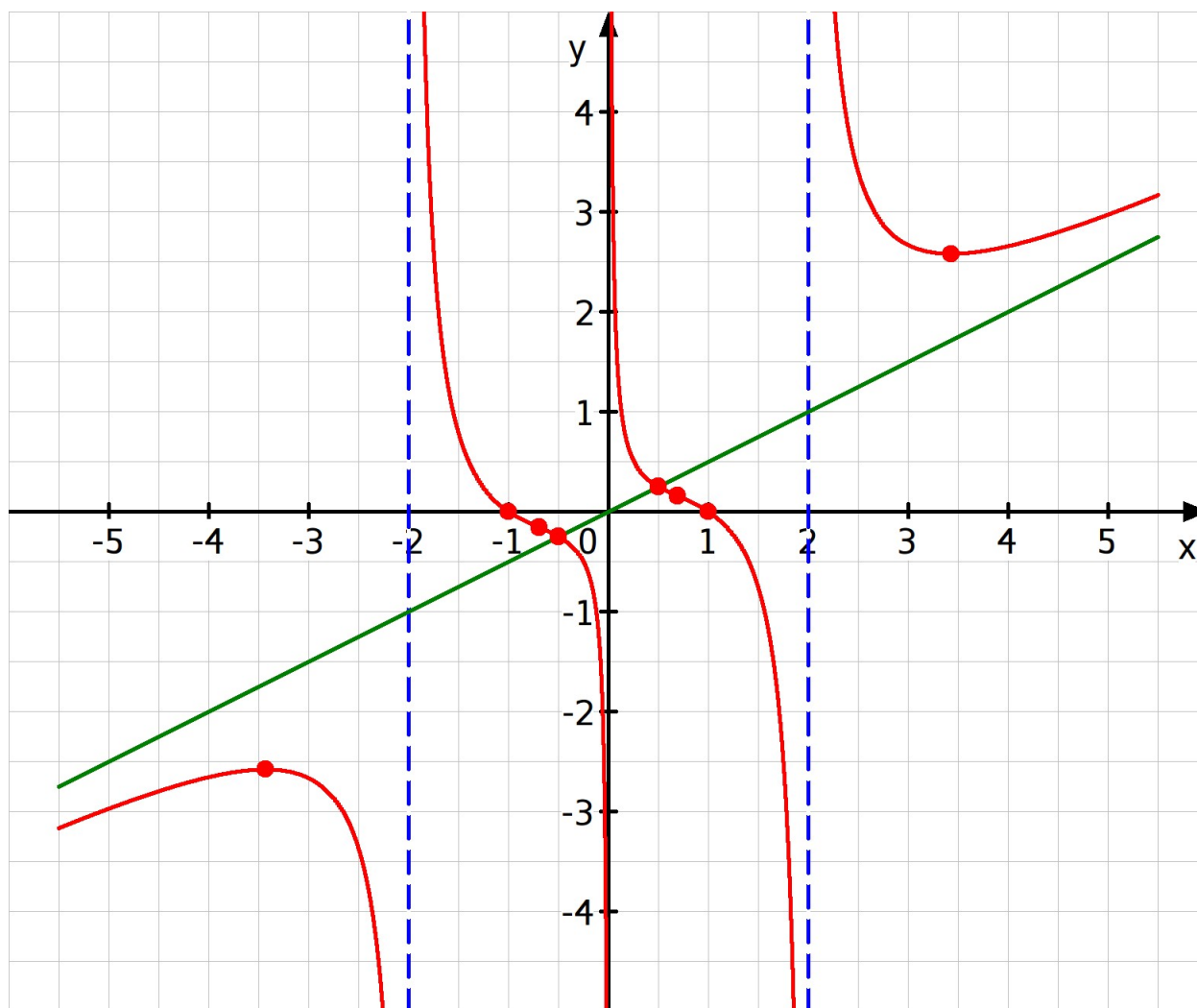
d.h. es ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. Für das Nennerpolynom gilt

$$N(x) = 2x^3 - 8x = -[-(2x^3 - 8x)] = -[2(-x)^3 - 8(-x)] = -N(-x),$$

d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Mit

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(-x)}{-N(-x)} = -\frac{Z(-x)}{N(-x)} = -f(-x)$$

ist der Graph der Funktion f ebenfalls symmetrisch bezüglich dem Ursprung, also punktsymmetrisch.

Funktion f aus Aufgabe 4

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Der Punkt $(-3.43; -2.58)$ ist ein lokales Maximum, da er in der dortigen Umgebung den höchsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Hochpunkt.
- Der Punkt $(3.43; 2.58)$ ist ein lokales Minimum, da er in der dortigen Umgebung den tiefsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Tiefpunkt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Extrema, d.h. Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstellen beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Die beiden Punkte $(-0.694; -0.157)$ und $(0.694; 0.157)$ nennt man Wendepunkte, weil dort die Kurve von links- auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt wechselt.
- Wie man die Koordinaten von Hoch-, Tief- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{2x^3 - 8x} = (x^4 - 1)/(2x^3 - 8x)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(x^4 - 1) / (2x^3 - 8x), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in \{1, 2, 3\}$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{x^6 - 12x^4 + 3x^2 - 4}{2x^2(x^2 - 4)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(2x^6 + 21x^4 + 6x^2 - 8)}{x^3(x^2 - 4)^3}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{6(2x^8 + 43x^6 + 42x^4 - 32x^2 + 32)}{x^4(x^2 - 4)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[x^6 - 12x^4 + 3x^2 - 4 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_{8,9} \approx \pm 3.43$ als kritische Punkte von f . Es gilt

$$f(-3.43) \approx -2.58 \quad \wedge \quad f''(-3.43) \approx -0.657 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(-3.43; -2.58)$$

und

$$f(3.43) \approx 2.58 \quad \wedge \quad f''(3.43) \approx 0.657 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(3.43; 2.58),$$

d.h. die Funktion hat zwei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[2x^6 + 21x^4 + 6x^2 - 8 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_{10,11} \approx \pm 0.694$ als kritische Punkte von f' . Es gilt

$$f(-0.694) \approx -0.157 \quad \wedge \quad f'''(-0.694) \approx -5.27 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(-0.694; -0.157)$$

und

$$f(0.694) \approx 0.157 \quad \wedge \quad f'''(0.694) \approx -5.27 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(0.694; 0.157),$$

d.h. die Funktion hat genau zwei Wendepunkte.

9.2.7 Aufgabe 5 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^5 + 1}{5x^3 - 20x} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-1} = -1$ hat f genau eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ womit der Linearfaktor $(x + 1)$ vom Zählerpolynom $Z(x)$ abgespalten werden kann. Eine Polynomdivision liefert

$$(x^5 + 1) : (x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$

d.h. es gilt

$$Z(x) = x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

Die Frage ist nun, ob sich das Polynom 4. Grades noch weiter zerlegen lässt und somit noch weitere Linearfaktoren $(x + 1)$ generiert. Einsetzen von -1 in dieses Polynom liefert

$$(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \neq 0,$$

d.h. es gibt keine weiteren Linearfaktoren und damit genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = -1$.

2. Mit $N(x) = 5x(x^2 - 4) = 5x(x + 2)(x - 2) = 0$ hat f drei Polstellen mit VZW bei $x_2 = 0$ und $x_{3,4} = \pm 2$.
3. Der Wert $f(0)$ existiert nicht wegen $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (x^5 + 1) : (5x^3 - 20x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5} + \frac{16x + 1}{5x^3 - 20x}$$

und damit als Asymptote a die quadratische Funktion mit

$$a(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{16x + 1}{5x^3 - 20x} \approx \frac{16x}{5x^3} = \frac{3.2}{x^2}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{3.2}{(\pm\infty)^2} \rightarrow 0^+,$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ rechts und links im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a .

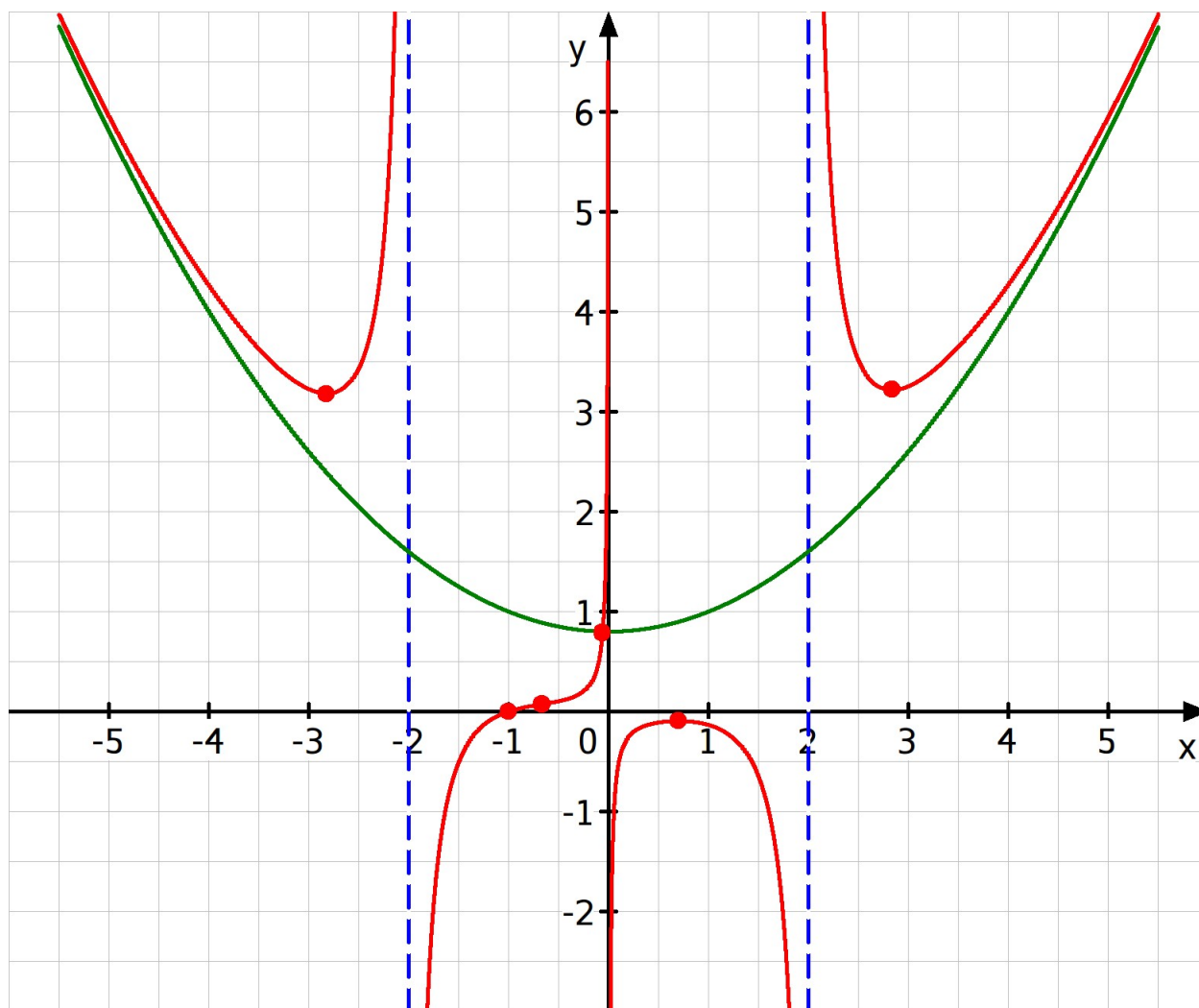
6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man $x_5 = -1/16 = -0.0625$ und daraus den Schnittpunkt

$$S(-0.0625; 0.788).$$

7. Für das Nennerpolynom gilt

$$N(x) = 5x^3 - 20x = -[-(5x^3 - 20x)] = -[5(-x)^3 - 20(-x)] = -N(-x),$$

d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Weil das Zählerpolynom $Z(x)$ von f weder symmetrisch zum Ursprung noch symmetrisch zur y -Achse ist, weist auch der Graph von f keine solchen Symmetrien auf.

Funktion f aus Aufgabe 5

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Der Punkt $(0.700; -0.0951)$ ist ein lokales Maximum, da er in der dortigen Umgebung den höchsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Hochpunkt.
- Die beiden Punkte $(-2.82; 3.18)$ und $(2.84; 3.22)$ sind lokale Minima, da sie in der dortigen Umgebung je den tiefsten Punkt des Graphen darstellen. Daher nennt man solche Punkte auch Tiefpunkte.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstellen beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Bei $(-0.665; 0.0735)$ liegt ein Wendepunkt, denn dort wechselt die Kurve ihre Krümmung.
- Wie man die Koordinaten von Hoch-, Tief- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^5 + 1}{5x^3 - 20x} = (x^5 + 1)/(5x^3 - 20x)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(x^5 + 1) / (5x^3 - 20x), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2, 3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{2x^7 - 16x^5 - 3x^2 + 4}{5x^2(x^2 - 4)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(x^9 - 12x^7 + 96x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 16)}{5x^3(x^2 - 4)^3}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{12(32x^7 + 5x^6 + 128x^5 - 10x^4 + 32x^2 - 32)}{5x^4(x^2 - 4)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[2x^7 - 16x^5 - 3x^2 + 4 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man

$$x_6 \approx -2.82, \quad x_7 \approx 0.700 \quad \text{und} \quad x_8 \approx 2.84$$

als kritische Punkte von f . Es gilt

$$f(-2.82) \approx 3.18 \quad \wedge \quad f''(-2.82) \approx 3.22 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(-2.82; 3.18),$$

$$f(0.700) \approx -0.0951 \quad \wedge \quad f''(0.700) \approx -0.720 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(0.700; -0.0951)$$

und

$$f(2.84) \approx 3.22 \quad \wedge \quad f''(2.84) \approx 3.18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(2.84; 3.22),$$

d.h. die Funktion hat drei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[x^9 - 12x^7 + 96x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 16 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_9 \approx -0.665$ als kritischen Punkt von f' . Es gilt

$$f(-0.665) \approx 0.0735 \quad \wedge \quad f'''(-0.665) \approx 2.90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(-0.665; 0.0735)$$

d.h. die Funktion hat genau einen Wendepunkt.

9.2.8 Aufgabe 6 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^2 = 0$ hat f genau eine Nullstelle ohne VZW bei $x_1 = 0$.
2. Mit $N(x) = 2(x-1) = 0$ hat f genau eine Polstellen mit VZW bei $x_2 = 1$ und es gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y -Achse sowie die Nullstelle sind identisch.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = x^2 : (2x-2) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}$$

und damit als Asymptote a die lineare Funktion mit

$$a(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{1}{2x-2}.$$

5. Mit $d(x)$ gilt

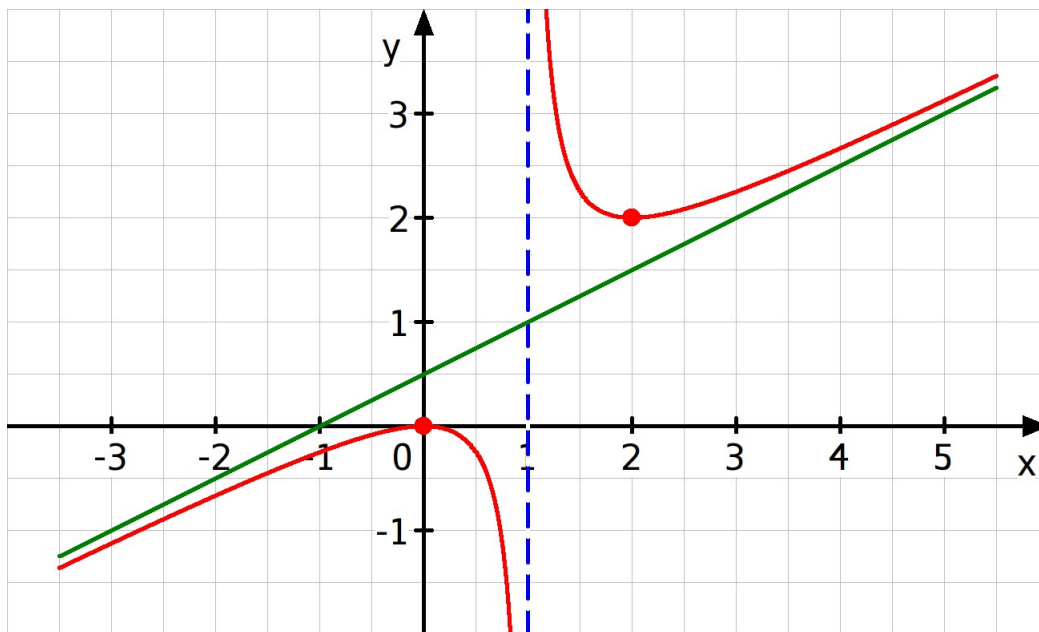
$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \rightarrow 0^+,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a .
Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \rightarrow 0^-$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man die Gleichung $0 = -1$, d.h. es gibt keine Schnittpunkte des Graphen von f mit der Asymptote a .
7. Das Zählerpolynom $Z(x)$ ist offensichtlich symmetrisch zur y -Achse. Weil das Nennerpolynom $N(x)$ von f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch symmetrisch zur y -Achse ist, weist auch der Graph von f keine solchen Symmetrien auf.

Funktion f aus Aufgabe 6

- Wie man sieht, muss der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a nicht schneiden.
- Der Punkt $(0; 0)$ ist ein lokales Maximum, da er in der dortigen Umgebung den höchsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Hochpunkt.
- Der Punkt $(2; 2)$ ist ein lokales Minimum, da er in der dortigen Umgebung den tiefsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Tiefpunkt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstelle beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Wie man die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.
- Der Graph der Funktion f scheint keinen Wendepunkt zu haben, was wir im 4. Semester dann rechnerisch zeigen werden können.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-2} = x^2/(2x-2)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[x^2 / (2x - 2), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1,2,3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{3}{(x-1)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ erhält man $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$ als kritische Punkte von f . Es gilt

$$f(0) = 0 \quad \wedge \quad f''(0) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(0; 0)$$

und

$$f(2) = 2 \quad \wedge \quad f''(2) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(2; 2),$$

d.h. die Funktion f hat genau zwei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ erhält man die Gleichung $4 = 0$, d.h. die Funktion f hat keine Wendepunkte.

9.2.9 Aufgabe 7 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{8(x-1)^2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$ hat f genau eine Nullstelle bei $x_1 = -2$ womit der Linearfaktor $(x + 2)$ vom Zählerpolynom $Z(x)$ abgespalten werden kann. Eine Polynomdivision liefert

$$(x^3 + 8) : (x + 2) = x^2 - 2x + 4,$$

d.h. es gilt

$$Z(x) = (x^3 + 8) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

und weil die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks

$$x^2 - 2x + 4$$

mit $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ kleiner ist als Null, kann dieser nicht mehr weiter zerlegt werden. Damit hat f genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = -2$.

2. Mit $N(x) = 8(x-1)^2 = 0$ hat f genau eine Polstellen ohne VZW bei $x_2 = 1$ und es gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Für den Schnittpunkt mit der y -Achse gilt $f(0) = 1$.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = (x^3 + 8) : (8x^2 - 16x + 8) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} + \frac{3x + 6}{8x^2 - 16x + 8}$$

und damit als Asymptote a die lineare Funktion mit

$$a(x) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{3x + 6}{8x^2 - 16x + 8} \approx \frac{3x}{8x^2} = \frac{3}{8x}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{3}{8\infty} \rightarrow 0^+,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a . Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{3}{8(-\infty)} \rightarrow 0^-$$

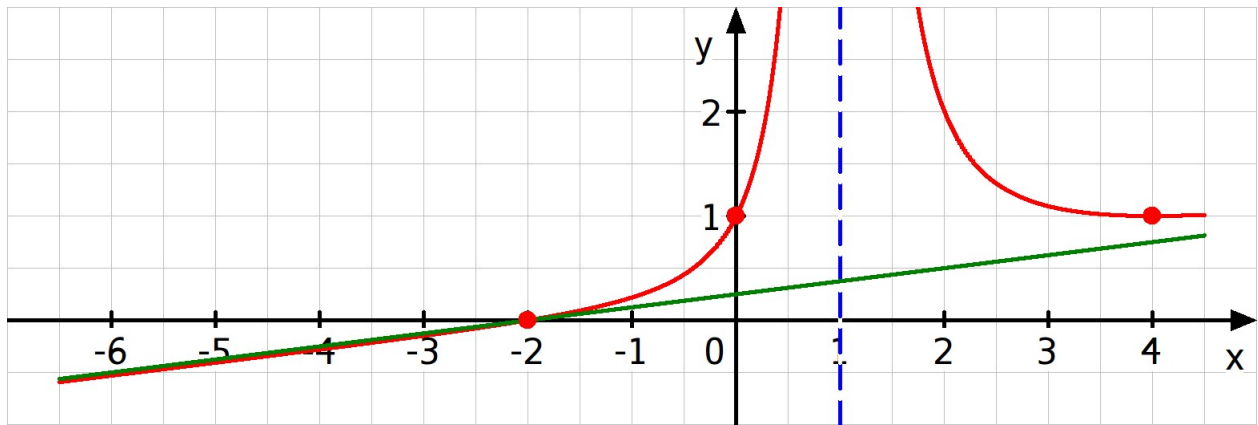
d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man $x_1 = -2$ und daraus den Schnittpunkt

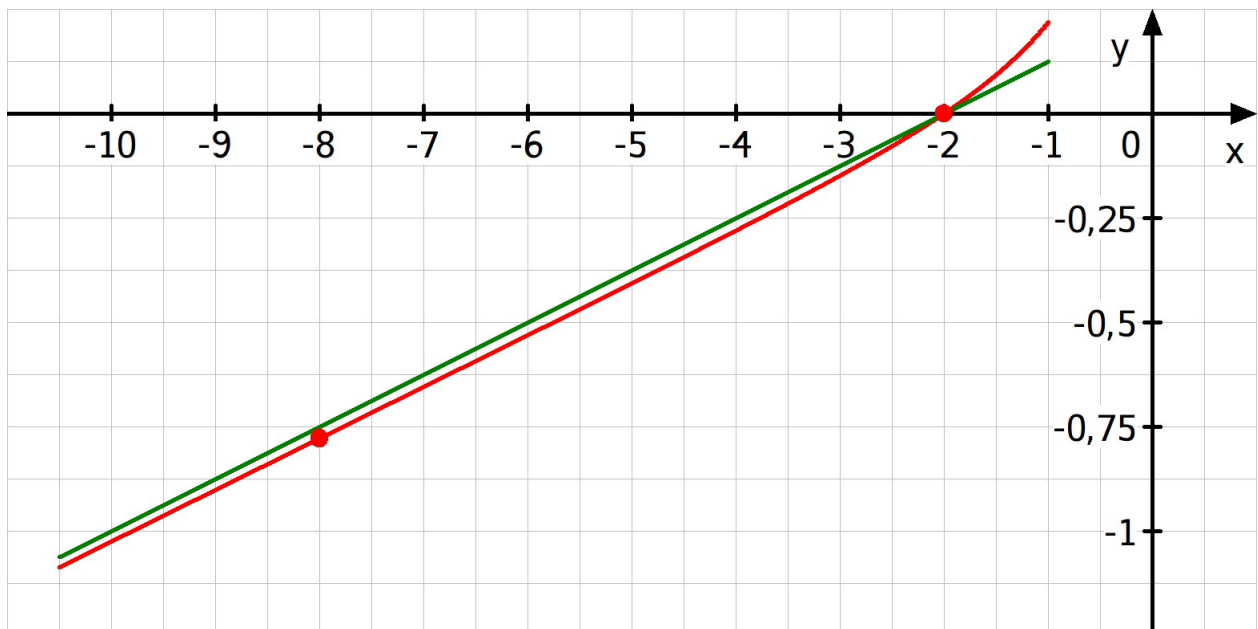
$$S(-2; 0),$$

welcher identisch mit der Nullstelle ist.

7. Da weder das Zählerpolynom $Z(x)$ noch das Nennerpolynom $N(x)$ eine Symmetrie bezüglich y -Achse oder Ursprung aufweisen, wird vermutlich auch die Funktion f keine solche aufweisen.

Funktion f aus Aufgabe 7

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Der Punkt $(4; 1)$ ist ein lokales Minimum, da er in der dortigen Umgebung den tiefsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Tiefpunkt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Minima oder Maxima, da die Kurve entlang der Asymptote beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Wie man die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.
- Der Graph der Funktion f scheint auf den ersten Blick keinen Wendepunkt zu haben. Eine Rechnung im 4. Semester wird allerdings zeigen, dass bei $(-8; -0.778)$ ein Wendepunkt liegt. Dort wechselt die Kurve ihre Krümmung, siehe (kaum ersichtlich) in der unteren Graphik.

Funktion f aus Aufgabe 7 (Ausschnitt mit Wendepunkt)

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{8(x-1)^2} = (x^3 + 8)/(8(x-1)^2)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(x^3 + 8) / (8(x-1)^2), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2, 3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{8(x-1)^3},$$

$$f''(x) = \frac{3(x+8)}{4(x-1)^4}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{9(x+11)}{4(x-1)^5}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[x^3 - 3x^2 - 16 = 0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man $x_3 = 4$ als kritischen Punkt von f . Es gilt

$$f(4) = 1 \quad \wedge \quad f''(4) = 1/9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(4; 1)$$

d.h. die Funktion hat genau ein Extremum.

3. Mit $f''(x) = 0$ erhält man $x_4 = -8$ als kritischen Punkt von f' . Es gilt

$$f(-8) = -7/9 \approx -0.778 \quad \wedge \quad f'''(-8) \approx 0.000114 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(-8; -0.778),$$

d.h. die Funktion hat genau einen Wendepunkt.

9.2.10 Aufgabe 8 (Lösung)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = x^3 = 0$ hat f genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = 0$.
2. Mit $N(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) = 0$ hat f zwei Polstellen mit VZW bei $x_{2,3} = \pm 1$ und es gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
3. Es gilt $f(0) = 0$, d.h. der Schnittpunkt mit der y -Achse sowie die Nullstelle sind identisch.
4. Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = x^3 : (x^2 - 1) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

und damit als Asymptote a die lineare Funktion mit

$$a(x) = x$$

sowie den echt gebrochenen Anteil d mit

$$d(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{1}{\infty} \rightarrow 0^+,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a . Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{1}{-\infty} \rightarrow 0^-$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a .

6. Wenn man $f(x) = a(x)$ setzt, erhält man $x_1 = 0$ und daraus den Schnittpunkt

$$S(0; 0),$$

welcher identisch mit der Nullstelle ist.

7. Für das Zählerpolynom von f gilt

$$Z(x) = x^3 = -(-x)^3 = -Z(-x),$$

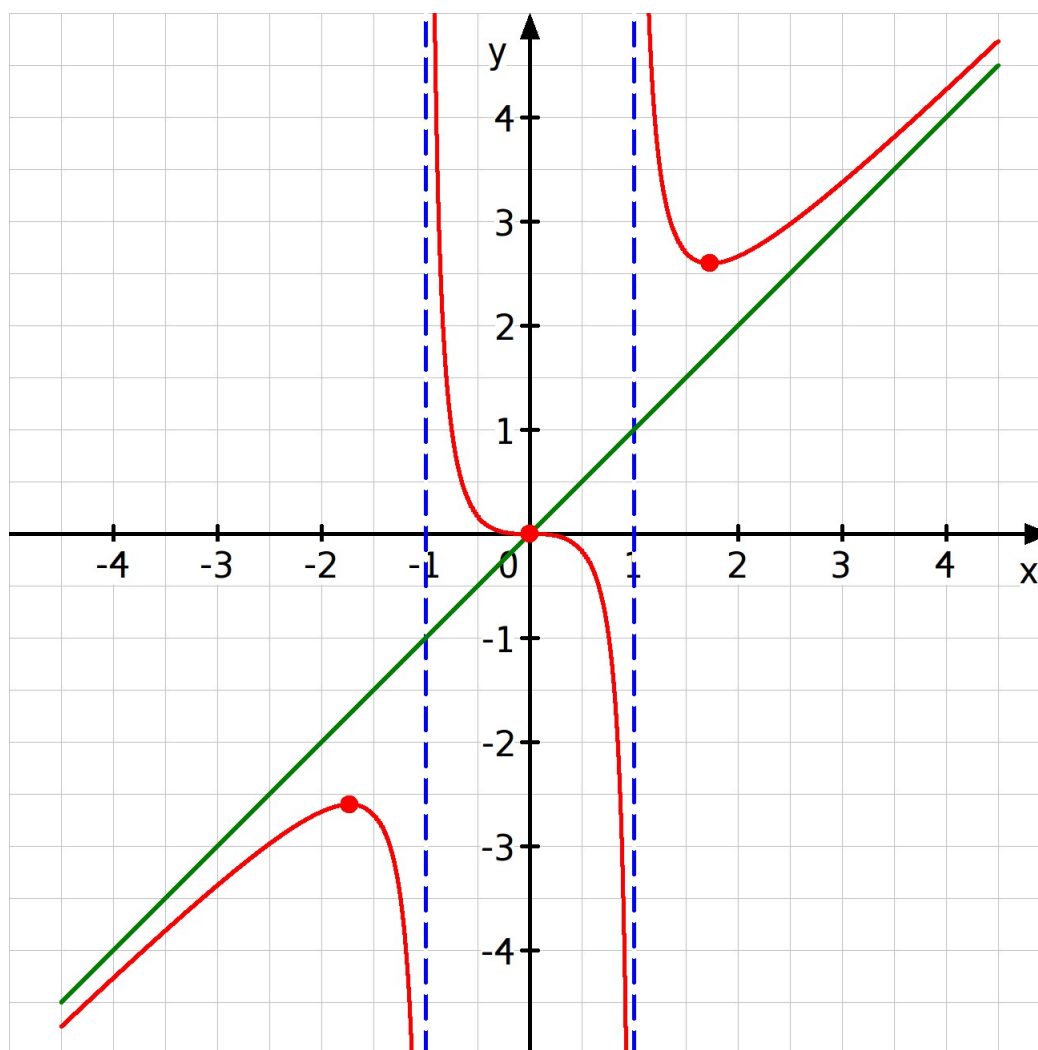
d.h. es ist symmetrisch bezüglich dem Ursprung des Koordinatensystems. Für das Nennerpolynom gilt

$$N(x) = x^2 - 1 = (-x)^2 - 1 = N(-x),$$

d.h. es ist symmetrisch bezüglich der y -Achse. Mit

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{-Z(-x)}{N(-x)} = -\frac{Z(-x)}{N(-x)} = -f(-x)$$

ist der Graph der Funktion f ebenfalls symmetrisch bezüglich dem Ursprung, also punktsymmetrisch.

Funktion f aus Aufgabe 8

- Wie man sieht, kann der Graph einer Funktion f den Graphen ihrer Asymptote a durchaus schneiden, wobei das nur für „kleine“ Werte von x möglich ist, d.h. im „mittleren“ Bereich der Zeichnung.
- Der Punkt $(-1.73; -2.60)$ ist ein lokales Maximum, da er in der dortigen Umgebung den höchsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Hochpunkt.
- Der Punkt $(1.73; 2.60)$ ist ein lokales Minimum, da er in der dortigen Umgebung den tiefsten Punkt des Graphen darstellt. Daher nennt man einen solchen Punkt auch Tiefpunkt.
- Der Graph der Funktion f hat keine globalen Minima oder Maxima, da die Kurve links und rechts der Polstellen beliebig weit nach unten bzw. oben verläuft.
- Bei $(0; 0)$ liegt ein Wendepunkt, denn dort wechselt die Kurve ihre Krümmung.
- Wie man die Koordinaten von Hoch-, Tief- und Wendepunkten berechnet, werden wir im 4. Semester lernen, wenn wir uns mit dem Thema Differenzialrechnung beschäftigen.

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x^3 / (x^2 - 1)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[x^3 / (x^2 - 1), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1, 2, 3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

und

$$f'''(x) = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ erhält man

$$x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_{5,6} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$$

als kritische Punkte von f . Es gilt

$$f(-\sqrt{3}) = -2.60 \quad \wedge \quad f''(-\sqrt{3}) = -2.60 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(-\sqrt{3}; -2.60)$$

$$f(0) = 0 \quad \wedge \quad f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Extremum}$$

$$f(\sqrt{3}) = 2.60 \quad \wedge \quad f''(\sqrt{3}) = 2.60 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(\sqrt{3}; 2.60)$$

d.h. die Funktion hat genau zwei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ erhält man $x_7 = 0$ als kritischen Punkt von f' . Es gilt

$$f(0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(0) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0; 0),$$

d.h. die Funktion hat genau einen Wendepunkt, welcher identisch mit der Nullstelle ist.

9.2.11 Aufgabe 9 (Lösung)

$$f(x) = \frac{8x+1}{x^4+1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

1. Wegen $Z(x) = 8x + 1 = 0$ hat f genau eine Nullstelle mit VZW bei $x_1 = -\frac{1}{8}$.
2. Mit $N(x) = x^4 + 1 = 0$ und wegen $x^4 + 1 \geq 1 \neq 0$ hat f keine Polstelle, d.h. es gilt $D = \mathbb{R}$.
3. Für den Schnittpunkt mit der y -Achse gilt $f(0) = 1$.
4. Weil die Funktion f bereits echt gebrochen ist gilt

$$a(x) = 0$$

und d.h. die x -Achse ist die Asymptote a . Ausserdem gilt $d(x) = f(x)$ und damit

$$d(x) = \frac{8x+1}{x^4+1} \approx \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$

für $x \rightarrow \pm\infty$, d.h. „sehr grosse“ Werte von x .

5. Mit $d(x)$ gilt

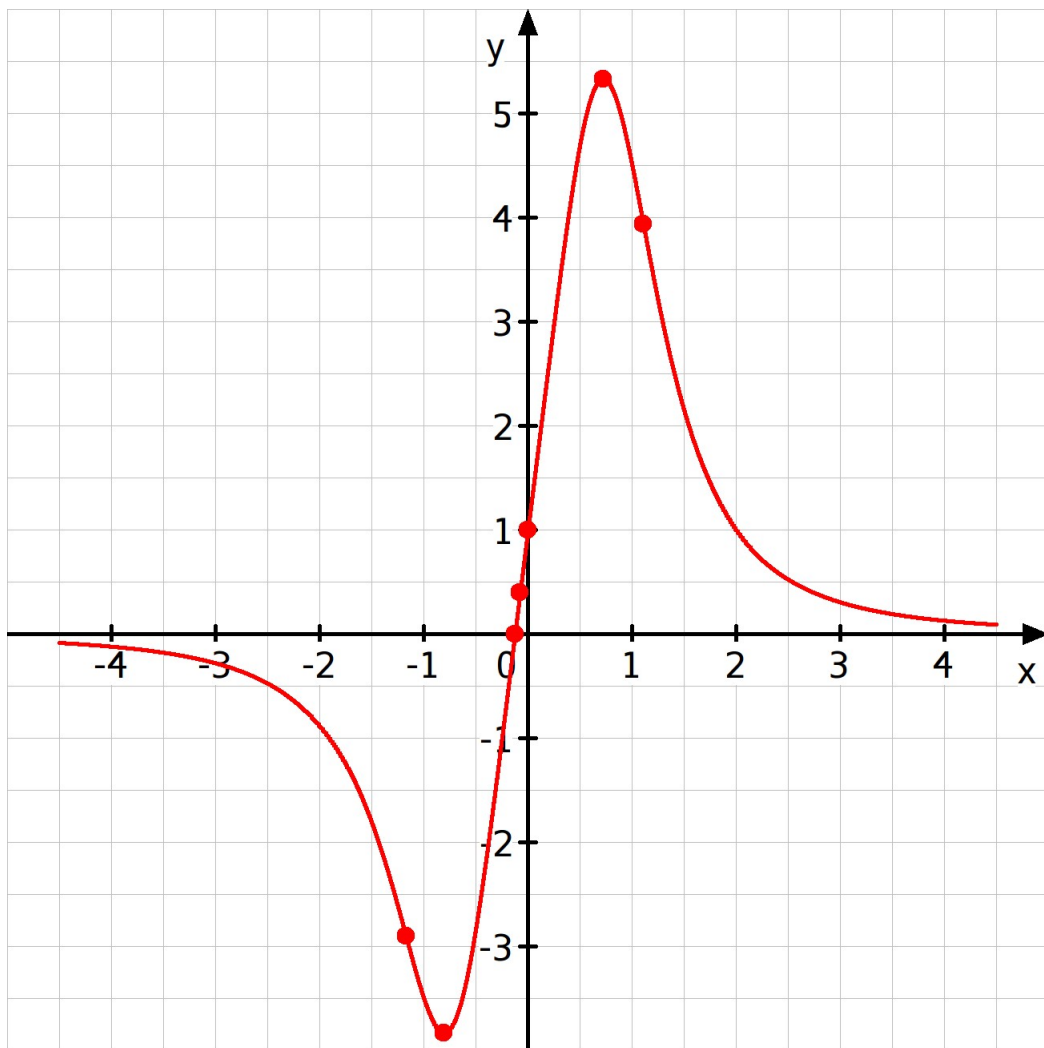
$$x \rightarrow \infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{8}{\infty^3} \rightarrow 0^+,$$

d.h. die Funktion f verläuft „ganz weit“ rechts im Koordinatensystem oberhalb der Asymptote a . Es gilt auch

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow d(x) \approx \frac{8}{(-\infty)^3} \rightarrow 0^-$$

d.h. f verläuft „ganz weit“ links unterhalb der Asymptote a .

6. Da die x -Achse die Asymptote ist, entspricht der Schnittpunkt der beiden Graphen von f und a gerade der Nullstelle.
7. Das Nennerpolynom $N(x)$ ist offensichtlich symmetrisch bezüglich y -Achse. Da das Zählerpolynom $Z(x)$ keine Symmetrie zu y -Achse oder Ursprung aufweist, wird auch die Funktion f keine solche aufweisen.

Funktion f aus Aufgabe 9

Mit dem Wissen aus dem 4. Semester können wir zur Funktion f mit

$$f(x) = \frac{8x+1}{x^4+1} = (8x+1)/(x^4+1)$$

noch die ersten drei Ableitungen und damit die Extrema und Wendepunkte berechnen.

1. Die Quotientenregel oder der Befehl

$$D[(8x+1)/(x^4+1), \{x, n\}]$$

auf www.wolframalpha.com (mit $n \in 1,2,3$ für die ersten drei Ableitungen) liefern

$$f'(x) = \frac{-4(6x^4+x^3-2)}{(x^4+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{4x^2(24x^5+5x^4-40x-3)}{(x^4+1)^3}$$

und

$$f'''(x) = \frac{-24x(20x^9+5x^8-88x^5-10x^4+20x+1)}{(x^4+1)^4}.$$

2. Mit $f'(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[6x^4+x^3-2=0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man

$$x_2 \approx -0.805 \quad \text{und} \quad x_3 \approx 0.721$$

als kritische Punkte von f . Es gilt

$$f(-0.805) \approx -3.83 \quad \wedge \quad f''(-0.805) \approx 21.0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(-0.805; -3.83)$$

und

$$f(0.721) \approx 5.33 \quad \wedge \quad f''(0.721) \approx -26.2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Max}(0.721; 5.33),$$

d.h. die Funktion hat zwei Extrema.

3. Mit $f''(x) = 0$ und dem Befehl

$$\text{Solve}[x^2(24x^5+5x^4-40x-3)=0, x, \text{Reals}]$$

auf www.wolframalpha.com erhält man

$$x_4 \approx -1.17, \quad x_5 \approx -0.0750, \quad x_6 = 0 \quad \text{und} \quad x_7 \approx 1.11$$

als kritische Punkte von f' . Es gilt

$$f(-1.17) \approx -2.90 \quad \wedge \quad f'''(-1.17) \approx 35.2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(-1.17; -2.90),$$

$$f(-0.0750) \approx 0.400 \quad \wedge \quad f'''(-0.0750) \approx -0.900 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(-0.0750; 0.400),$$

$$f(0) = 1 \quad \wedge \quad f'''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Wendepunkt}$$

und

$$f(1.11) \approx 3.94 \quad \wedge \quad f'''(1.11) \approx 52.4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_3(1.11; 3.94)$$

d.h. die Funktion hat drei Wendepunkte.

10 Wolfram Alpha

Website: <http://www.wolframalpha.com>

10.1 Gleichung lösen

10.1.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll eine Gleichung nach x aufgelöst werden.

$$x^3 - x = 0$$

Der Befehl für's Auflösen einer Gleichung nach x heisst „Solve“:

```
Solve[x^3 - x = 0, x]
```

10.1.2 Ausgabe

Results (Resultate):

$$x = \pm 1 \quad \text{und} \quad x = 0$$

10.2 Polynom faktorisieren

10.2.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll ein Polynom faktorisiert werden.

$$x^3 - x$$

Der Befehl für's Faktorisieren eines Polynoms heisst „Factor“:

```
Factor[x^3 - x]
```

10.2.2 Ausgabe

Result (Resultat):

$$x(x - 1)(x + 1)$$

10.3 Polynome dividieren

10.3.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll eine Polynomdivision mit der Lösungsvariable x durchgeführt werden.

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = (x^4 + 1) : (x^3 + x)$$

Der Befehl für's Dividieren von zwei Polynomen heisst „PolynomialQuotientRemainder“:

```
PolynomialQuotientRemainder[x^4 + 1, x^3 + x, x]
```

10.3.2 Ausgabe**Result** (Resultat):

$$\{x, 1 - x^2\}$$

Wobei x hier für das Resultat der Polynomdivision steht und $1 - x^2$ für den Rest, d.h. von Hand hätten wird

$$(x^4 + 1) : (x^3 + x) = x + \frac{-x^2 + 1}{x^3 + x}$$

erhalten.

10.4 Funktion zeichnen

10.4.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll der Graph einer vorgegebenen Funktion f gezeichnet werden.

$$f(x) = x^2 - 1$$

Der Befehl für's Zeichnen einer Funktion heisst „Plot“:

```
Plot[x^2 - 1]
```

Man kann bei Bedarf den Bereich für die Variable x beispielsweise auf das Intervall $[-3; 3]$ einschränken:

```
Plot[x^2 - 1, {x, -3, 3}]
```

10.4.2 Ausgabe

Die entsprechende Grafik, siehe Website <http://www.wolframalpha.com>.

10.5 Mehrere Funktion zeichnen

10.5.1 Zielsetzung und Eingabe

Es sollen die Graphen mehrerer Funktionen in dasselbe Koordinatensystem gezeichnet werden.

$$f_1(x) = x^2 - 1, \quad f_2(x) = 4 - x^2 \quad \text{und} \quad f_3(x) = 1$$

Der Befehl heisst auch hier „Plot“ und die Funktionen werden durch Kommata getrennt:

```
Plot[x^2 - 1, 4 - x^2, 1, {x, -3, 3}]
```

10.5.2 Ausgabe

Die entsprechende Grafik, siehe Website <http://www.wolframalpha.com>.

10.6 Funktion ableiten

10.6.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll die erste Ableitung f' einer vorgegebenen Funktion f bestimmt werden.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = (x^4 + 1)/(x^3 + x)$$

Der Befehl für's Ableiten einer Funktion heisst „D“ für „Derivative“.

D[(x^4 + 1) / (x^3 + x), x]

10.6.2 Ausgabe

Nicht alle Ausgaben sind für uns von Interesse, hier eine Auswahl:

Derivative (Ableitung):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3 + x} \right) = \frac{x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 1}{(x^3 + x)^2}$$

Alternate forms (alternative Formen, z.B. die Produktform der Ableitung):

$$\frac{(x - 1)(x + 1)(x^4 + 4x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

Real roots (Reelle Nullstellen, d.h. kritische Punkte der Funktion):

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 1$$

10.7 Funktion zweimal ableiten

10.7.1 Zielsetzung und Eingabe

Es soll die zweite Ableitung f'' einer vorgegebenen Funktion f bestimmt werden.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} = (x^4 + 1)/(x^3 + x)$$

Der Befehl für's Ableiten einer Funktion heisst auch hier „D“ für „Derivative“.

D[(x^4 + 1) / (x^3 + x), {x, 2}]

10.7.2 Ausgabe

Nicht alle Ausgaben sind für uns von Interesse, hier eine Auswahl:

Derivative (Ableitung):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3 + x} \right) = \frac{-2x^6 + 18x^4 + 6x^2 + 2}{(x^3 + x)^3}$$

Alternate forms (alternative Formen, z.B. die Produktform der Ableitung):

$$\frac{-2(x^6 - 9x^4 - 3x^2 - 1)}{x^3(x^2 + 1)^3}$$

Real roots (Reelle Nullstellen, d.h. kritische Punkte der ersten Ableitung):

$$x \approx -3.055 \quad \text{und} \quad x \approx 3.055$$