7 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Siehe dazu die Abschnitte 8.5 und 8.6 in der Formelsammlung.

7.1 Wissensfragen

1. Wieviele Nullstellen kann eine Polynomfunktion vom Grad 3 maximal haben?
2. Gibt es Polynomfunktionen vom Grad 3 welche keine Nullstelle haben?
3. Wieviele Nullstellen kann eine Polynomfunktion vom Grad 4 maximal haben?
4. Gibt es Polynomfunktionen vom Grad 4 welche keine Nullstelle haben?
5. Wieviele Schnittpunkte mit der y-Achse kann eine Polynomfunktion haben?

7.2 Produktform

Zerlege die folgenden Polynomfunktionen in Faktoren.

1. $f(x) = 2\,x^3 - 4\,x^2 - 10\,x + 12$
2. $f(x) = -2\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,x + 8$
3. $f(x) = -3\,x^4 + 15\,x^2 - 12$
4. $f(x) = 0.1\,x^3 - 0.5\,x^2 - 1.4\,x$
5. $f(x) = 3\,x^3 + 15\,x^2 + 9\,x - 27$
6. $f(x) = -4\,x^3 - 12\,x^2 + 36\,x - 20$

7.3 Position und Art von Nullstellen

Bestimme zu obigen Funktionen je die Position und Art der Nullstellen, d.h. mit oder ohne VZW.

7.4 Asymptote und Schnittpunkt mit der y-Achse

Bestimme zu obigen Funktionen je die Asymptote sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse.

7.5 Verhalten in der Umgebung der Nullstellen

Bestimme zu den Aufgaben 1 und 6 je das Verhalten in der näheren Umgebung ihrer Nullstellen.

7.6 Graphen zeichnen

Zeichne zu obigen Funktionen je den Graphen indem du alle Berechnungen mit einbeziehst. Berechne bei Aufgabe 4 zusätzlich den oder die Schnittpunkt(e) der Graphen von Funktion f und Asymptote a.

7.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Wegen
$$f(x) = a_3\, x^3 + ...$$
kann es maximal 3 Linearfaktoren geben, d.h. maximal 3 Nullstellen.

2. Nein, denn wegen der Asymptote a mit
$$a(x) = a_3\, x^3$$
welche mindestens eine Nullstelle hat, muss auch der Graph von f mindestens eine haben.

3. Wegen
$$f(x) = a_4\, x^4 + ...$$
kann es maximal 4 Linearfaktoren geben, d.h. maximal 4 Nullstellen.

4. Ja, denn z.B. die Polynomfunktion f mit $f(x) = x^4 + 1$ hat keine Nullstellen.

5. Weil der y-Wert $f(0)$ für jede Polynomfunktion definiert ist und es zu jedem x-Wert maximal einen y-Wert gibt, hat jede Polynomfunktion genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse.

7.2 Produktform (Lösungen)

1. $f(x) = 2\,(x-1)\,(x+2)\,(x-3)$
2. $f(x) = -2\,(x+1)\,(x+2)\,(x-2)$
3. $f(x) = -3\,(x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2)$
4. $f(x) = 0.1\,x\,(x+2)\,(x-7)$
5. $f(x) = 3\,(x-1)\,(x+3)^2$
6. $f(x) = -4\,(x+5)\,(x-1)^2$

- Die Aufgaben 1, 5 und 6 wurden mittels Polynomdivision gelöst.
- Die Aufgaben 2 und 4 wurden mittels (gruppenweise) Ausklammern gelöst.
- Die Aufgabe 3 wurden mittels Substitution gelöst.

7.3 Position und Art von Nullstellen (Lösungen)

1. Wegen
$$f(x) = 2\,(x-1)^1\,(x+2)^1\,(x-3)^1$$
gibt es drei Nullstellen bei
$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad \text{und} \quad x_3 = 3$$
alle mit VZW wegen den ungeraden Exponenten.

2. Wegen
$$f(x) = -2\,(x+1)^1\,(x+2)^1\,(x-2)^1$$
gibt es drei Nullstellen bei
$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_{2,3} = \pm 2$$
alle mit VZW wegen den ungeraden Exponenten.

3. Wegen
$$f(x) = -3\,(x+1)^1\,(x-1)^1\,(x+2)^1\,(x-2)^1$$
gibt es vier Nullstellen bei
$$x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm 2$$
alle mit VZW wegen den ungeraden Exponenten.

4. Wegen
$$f(x) = 0.1\,x^1\,(x+2)^1\,(x-7)^1$$
gibt es drei Nullstellen bei
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2 \quad \text{und} \quad x_3 = 7$$
alle mit VZW wegen den ungeraden Exponenten.

5. Wegen
$$f(x) = 3\,(x-1)^1\,(x+3)^2$$
gibt es zwei Nullstellen bei
$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -3$$
erstere mit VZW, letztere ohne VZW wegen dem geraden Exponenten.

6. Wegen
$$f(x) = -4\,(x+5)^1\,(x-1)^2$$
gibt es zwei Nullstellen bei
$$x_1 = -5 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$
erstere mit VZW, letztere ohne VZW wegen dem geraden Exponenten.

7.4 Asymptote und Schnittpunkt mit der y-Achse (Lösungen)

Ausgehend von der Summenform gemäss Aufgabenstellung erhält man folgende Lösungen.

1. $a(x) = 2\,x^3$ und $f(0) = 12$
2. $a(x) = -2\,x^3$ und $f(0) = 8$
3. $a(x) = -3\,x^4$ und $f(0) = -12$
4. $a(x) = 0.1\,x^3$ und $f(0) = 0$
5. $a(x) = 3\,x^3$ und $f(0) = -27$
6. $a(x) = -4\,x^3$ und $f(0) = -20$

7.5 Verhalten in der Umgebung der Nullstellen (Lösungen)

Ausgehend von der Produktform erhält man folgende Lösungen.

1. Wegen
$$f(x) = 2\,(x-1)\,(x+2)\,(x-3)$$
gilt
$$f_1(x) = 2\,(x-1)\,(1+2)\,(1-3) = -12\,(x-1)$$
$$f_{-2}(x) = 2\,(-2-1)\,(x+2)\,(-2-3) = 30\,(x+2)$$
$$f_3(x) = 2\,(3-1)\,(3+2)\,(x-3) = 20\,(x-3)$$
d.h. die Funktion f verhält sich je wie eine Gerade in der Umgebung der drei Nullstellen.

6. Wegen
$$f(x) = -4\,(x+5)\,(x-1)^2$$
gilt
$$f_{-5}(x) = -4\,(x+5)\,(-5-1)^2 = -144\,(x+5)$$
$$f_1(x) = -4\,(1+5)\,(x-1)^2 = -24\,(x-1)^2$$
d.h. bei $x = -5$ verhält sich f wie eine lineare und bei $x = 1$ wie eine quadratische Funktion.

7.6 Graphen zeichnen (Lösungen)

Bei allen Aufgaben ist der Graph von f rot und jener der Asymptote a grün eingezeichnet. Bei Aufgabe 1 und 6 sind zusätzlich die Funktionen in der näheren Umgebung der Nullstellen in blau eingezeichnet.

7.6.1 Aufgabe 1 (Lösung)

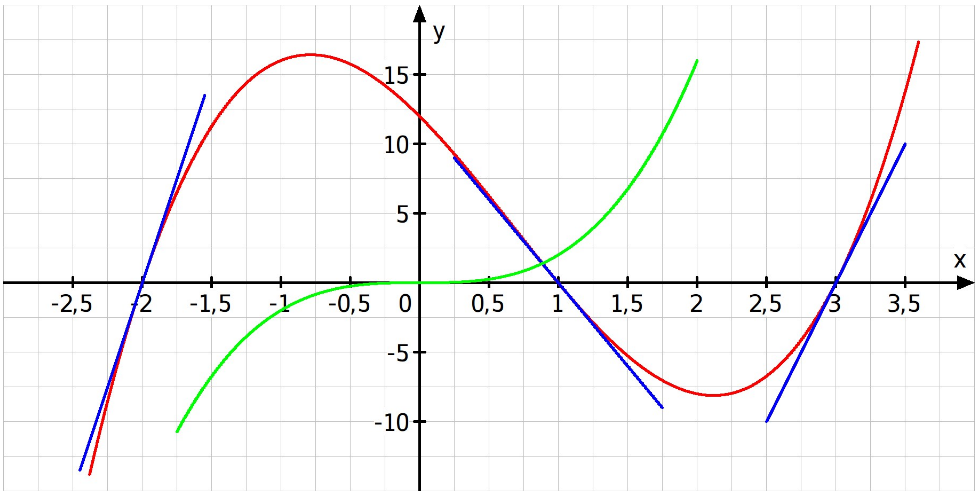
Die Funktion f mit

$$f(x) = 2\,x^3 - 4\,x^2 - 10\,x + 12 = 2\,(x-1)\,(x+2)\,(x-3)$$

sowie die drei Geraden f_{-2}, f_1 und f_3 in der Umgebung der Nullstellen mit

$$f_{-2}(x) = 30\,(x+2), \quad f_1(x) = -12\,(x-1) \quad \text{und} \quad f_3(x) = 20\,(x-3)$$

ergeben zusammen mit $a(x) = 2\,x^3$ und $f(0) = 12$ die folgenden Graphen.



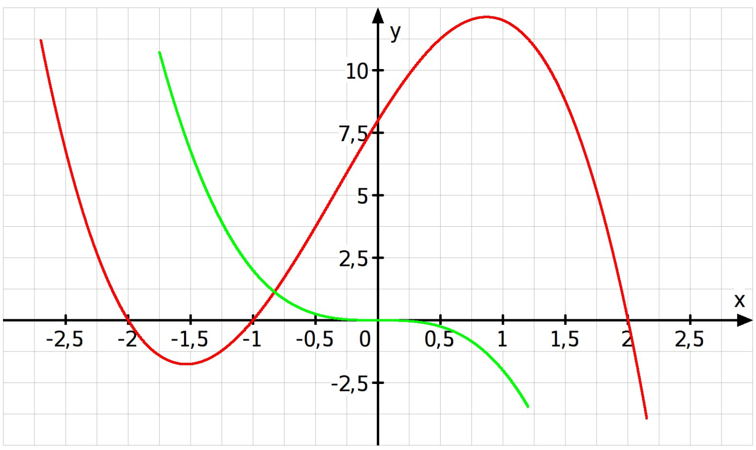
Die Graphen der Asymptote a und der Funktion f können sich für „kleine“ Werte von x schneiden.

7.6.2 Aufgabe 2 (Lösung)

Die Funktion f mit

$$f(x) = -2\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,x + 8 = -2\,(x+1)\,(x+2)\,(x-2)$$

sowie $a(x) = -2\,x^3$ und $f(0) = 8$ ergibt den folgenden Graphen.

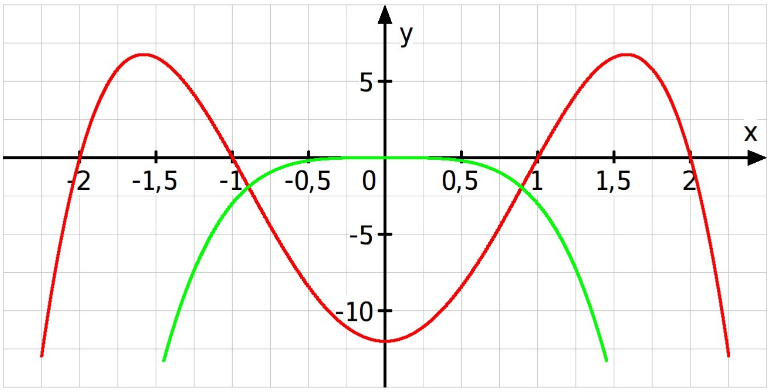


7.6.3 Aufgabe 3 (Lösung)

Die Funktion f mit

$$f(x) = -3\,x^4 + 15\,x^2 - 12 = -3\,(x+1)\,(x-1)\,(x+2)\,(x-2)$$

sowie $a(x) = -3\,x^4$ und $f(0) = -12$ ergibt den folgenden Graphen.



Weil die Funktion nur gerade Potenzen hat, ist sie bez. der y-Achse symmetrisch, denn es gilt

$$f(x) = -3\,x^4 + 15\,x^2 - 12 = -3\,(-x)^4 + 15\,(-x)^2 - 12 = f(-x),$$

d.h. das Vorzeichen von x spielt keine Rolle.

7.6.4 Aufgabe 4 (Lösung)

Um die Schnittpunkte von zwei Graphen zu berechnen, setzt man die Zuordnungsvorschriften der beiden Funktionen gleich, d.h. $f(x) = a(x)$, was

$$0.1\,x^3 - 0.5\,x^2 - 1.4\,x = 0.1\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad -0.5\,x^2 - 1.4\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0.5\,x\,(x+2.8) = 0$$

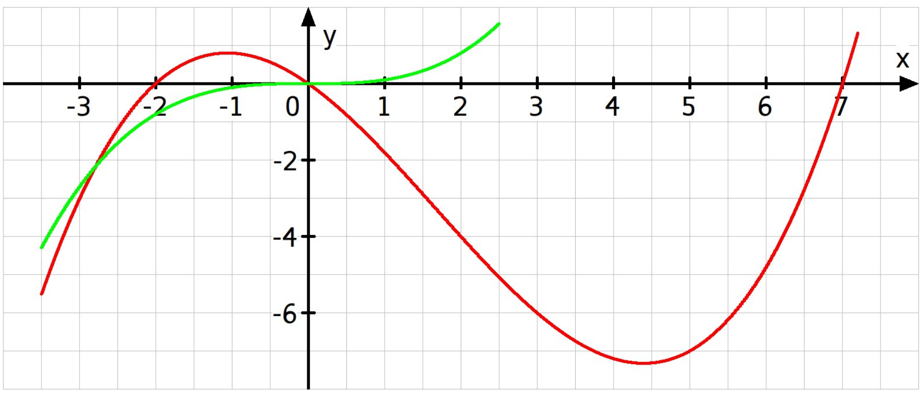
und damit die beiden x-Werte $x_1 = -2.8$ und $x_2 = 0$ ergibt. Diese setzt man in $f(x)$ oder besser in $a(x)$ ein um die y-Werte der beiden Schnittpunkte

$$S_1(-2.8\,;\,2.2) \quad \text{und} \quad S_2(0\,;\,0)$$

zu berechnen. Die Funktion f mit

$$f(x) = 0.1\,x^3 - 0.5\,x^2 - 1.4\,x = 0.1\,x\,(x+2)\,(x-7)$$

sowie $a(x) = 0.1\,x^3$ und $f(0) = 0$ ergibt den folgenden Graphen.

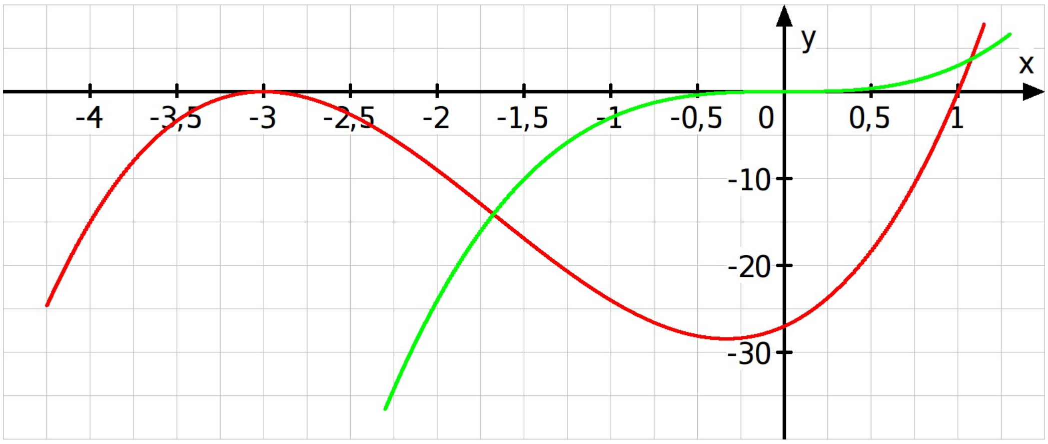


7.6.5 Aufgabe 5 (Lösung)

Die Funktion f mit

$$f(x) = 3\,x^3 + 15\,x^2 + 9\,x - 27 = 3\,(x-1)\,(x+3)^2$$

sowie $a(x) = 3\,x^3$ und $f(0) = -27$ ergibt den folgenden Graphen.



7.6.6 Aufgabe 6 (Lösung)

Die Funktion f mit

$$f(x) = -4\,x^3 - 12\,x^2 + 36\,x - 20 = -4\,(x+5)\,(x-1)^2$$

sowie die Gerade f_{-5} und die quad. Funktion f_1 in der Umgebung der Nullstellen mit

$$f_{-5}(x) = -144\,(x+5) \quad \text{und} \quad f_1(x) = -24\,(x-1)^2$$

sowie $a(x) = -4\,x^3$ und $f(0) = -20$ ergeben die folgenden Graphen.