4 Quadratische Funktionen

Siehe dazu den Abschnitt 8.4 in der Formelsammlung.

4.1 Wissensfragen

1. Wie sieht die Allgemeine Form (Summenform) einer quadratischen Funktion f aus?
2. Gegeben sei die Zuordnungsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ einer Funktion f. Was bedeutet es, wenn ...
   a) ... $c > 0$ ist?
   b) ... $c = 0$ ist?
   c) ... $c < 0$ ist?
   d) ... $a > 1$ ist?
   e) ... $0 < a < 1$ ist?
   f) ... $-1 < a < 0$ ist?
   g) ... $a < -1$ ist?
   h) ... $b = 0$ ist?
   i) ... $b \neq 0$ ist?
3. Welche Werte dürfen die Parameter a, b oder c der Zuordnungsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ annehmen?
4. Wie sieht die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion f aus?
5. Wann stimmen c der allg. Form und y_s der Scheitelpunktform überein?
6. Wie sieht die Produktform einer quadratischen Funktion f aus?
7. Was bedeutet die Schreibweise $g(1) = 2$ für die Funktion g?
8. Was bedeutet die Schreibweise $Q \in g$ für den Punkt Q und die Funktion g?
9. Welchen Definitionsbereich D und Wertebereich W hat die Funktion f mit $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$?
10. Was bezeichnet man als Nullstelle einer Funktion und wie bestimmt man diese?
11. Wieviele Nullstellen kann eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben?
12. Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, wie lautet dann ihre Produktform?

4.2 Streckungsfaktor

Dieser Abschnitt muss noch geschrieben werden.

4.3 y-Achsenabschnitt

Dieser Abschnitt muss noch geschrieben werden.

4.4 Scheitelpunktform

Bestimme die Scheitelpunktform der folgenden quadratischen Funktionen.

1. $f(x) = 2\,x^2 - 12\,x + 19$	2. $f(x) = -2\,x^2 - 12\,x - 19$	3. $g(x) = x^2 + 2\,x + 2$
4. $g(x) = -x^2 - 2\,x - 2$	5. $h(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 1$	6. $h(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{29}{8}$

4.5 Produktform

Bestimme die Produktform der folgenden quadratischen Funktionen.

1. $f(x) = x^2 + 5x - 14$
2. $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$
3. $h(x) = -3x^2 + 3x + 6$
4. $i(x) = 0.5x^2 - 0.5x - 1$
5. $j(x) = -x^2 + x + 12$
6. $k(x) = 3x^2 - 27x + 42$

4.6 Funktionen zeichnen

Dieser Abschnitt muss noch geschrieben werden.

4.7 Schnittpunkte mit den Achsen

Dieser Abschnitt muss noch geschrieben werden.

4.8 Interpolation

Bestimme je die Zuordnungsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$, wobei S für den Scheitelpunk steht und x_1 sowie x_2 seien die Nullstellen.

1. $P_1(1\,;\,-4)$, $P_2(-1\,;\,-6)$ und $P_3(2\,;\,-9)$
2. $S(-3\,;\,2)$ und $P(1\,;\,-14)$
3. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $Q(2\,;\,12)$
4. $P(0.5\,;\,1)$, $Q(1\,;\,-1)$ und $R(-2\,;\,-19)$
5. $Q(0\,;\,-1)$ und $S(1\,;\,-4)$
6. $Q(1\,;\,2)$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = -1$
7. $Q_1(2\,;\,0)$, $Q_2(-3\,;\,0)$ und $Q_3(1\,;\,-4)$
8. $f(1) = 7$, $f(2) = 22$ und $f(0) = 2$
9. Bestimme eine quadratische Funktion f so, dass sie durch die Punkte $P\left(1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ und $Q(-2\,;\,6)$ verläuft und ausserdem eine Nullstelle bei $x = 0$ hat.
10. Bestimme eine quadratische Funktion f so, dass sie durch die Punkte $P\left(2\,;\,\frac{1}{3}\right)$ und $Q\left(-1\,;\,-\frac{2}{3}\right)$ verläuft und ausserdem symmetrisch zur y-Achse ist.

4.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Deren Zuordnungsvorschrift lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Die Parabel ...
   a) ... schneidet die y-Achse oberhalb des Ursprungs.
   b) ... hat mindestens eine Nullstelle im Ursprung.
   c) ... schneidet die y-Achse unterhalb des Ursprungs.
   d) ... ist nach oben offen und gestreckt.
   e) ... ist nach oben offen und gestaucht.
   f) ... ist nach unten offen und gestaucht.
   g) ... ist nach unten offen und gestreckt.
   h) ... ist nicht seitwärts verschoben, d.h. der Scheitelpunkt S liegt auf der y-Achse.
   i) ... ist seitwärts verschoben, d.h. der Scheitelpunkt S liegt nicht auf der y-Achse.
3. Es muss gelten $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, aber $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, d.h. b und c dürfen alle reellen Werte annehmen, aber a darf nicht Null sein.
4. Deren Zuordnungsvorschrift lautet $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$.
5. Es ist $c = y_s$ genau dann, wenn die Parabel nicht seitwärts verschoben ist, d.h. wenn $b = x_s = 0$ ist.
6. Deren Zuordnungsvorschrift lautet $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit den Nullstellen x_1 und x_2.
7. Die Schreibweise $g(1) = 2$ bedeutet, dass der Punkt $P(1\,;\,2)$ auf dem Graphen von g liegt.
8. Die Schreibweise $Q \in g$ bedeutet, dass der Graph der Funktion g durch den Punkt Q verläuft, oder anders gesagt, dass der Punkt Q auf dem Graphen der Funktion g liegt.
9. Es gilt $x \in D = \mathbb{R}$ und $y \in W = [\,y_s\,; \infty[$ für $a > 0$ bzw. $y \in W =]-\infty\,; y_s\,]$ für $a < 0$.
10. Jeden Punkt auf der x-Achse, wo der Graph einer Funktion diese schneidet, nennt man Nullstelle. Man setzt die Zuordnungsvorschrift gleich Null, d.h. $y = 0$ oder $f(x) = 0$, und löst die dadurch entstehende Gleichung in x.
11. Es müssen bez. der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ drei Fälle unterschieden werden: Es gibt zwei verschiedene Nullstellen falls $D > 0$ gilt, genau eine falls $D = 0$ gilt oder keine falls $D < 0$ gilt.
12. Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, dann gibt es keine Linearfaktoren und damit auch keine Produktform.

4.2 Streckungsfaktor (Lösungen)

...

4.3 y-Achsenabschnitt (Lösungen)

...

4.4 Scheitelpunktform (Lösungen)

Die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ findet man mit Hilfe des ersten oder zweiten Binoms und quadratischer Ergänzung.

1. $f(x) = 2\,(x-3)^2 + 1$	2. $f(x) = -2\,(x+3)^2 - 1$	3. $g(x) = (x+1)^2 + 1$
4. $g(x) = -(x+1)^2 - 1$	5. $h(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$	6. $h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

Wenn man die Scheitelpunktform ausmultipliziert erhält man wieder die allg. Form $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.5 Produktform (Lösungen)

Die Produktform $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ findet man mit Hilfe von Linearfaktorzerlegung oder der Diskriminantenmethode, d.h. dem Lösen einer quadratischen Gleichung.

1. $f(x) = (x-2)(x+7)$
2. $g(x) = 2(x-1)(x+3)$
3. $h(x) = -3(x+1)(x-2)$
4. $i(x) = 0.5(x+1)(x-2)$
5. $j(x) = -(x-4)(x+3)$
6. $k(x) = 3(x-2)(x-7)$

Wenn man die Produktform ausmultipliziert erhält man wieder die allg. Form $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.6 Funktionen zeichnen (Lösungen)

...

4.7 Schnittpunkte mit den Achsen (Lösungen)

...

4.8 Interpolation (Lösungen)

1. $f(x) = -2\,x^2 + x - 3$
2. $f(x) = -(x+3)^2 + 2 = -x^2 - 6\,x - 7$
3. $f(x) = 3\,(x-1)(x+2) = 3\,x^2 + 3\,x - 6$
4. $f(x) = -4\,x^2 + 2\,x + 1$
5. $f(x) = 3\,(x-1)^2 - 4 = 3\,x^2 - 6\,x - 1$
6. $f(x) = 2\,(x-0.5)(x+1) = 2\,x^2 + x - 1$
7. $f(x) = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$
8. $f(x) = 5\,x^2 + 2$
9. $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x$
10. $f(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - 1$