5 Umkehrfunktionen

5.1 Wissensfragen

1. Warum muss man die Umkehrfunktion f^{-1} zu einer Funktion f bestimmen können?
2. In der Physik gilt für den freien Fall
$$s(t) = \frac{g}{2}\,t^2$$
mit $g = 9.81 m/s^2$ und es soll die Umkehrfunktion bestimmt werden.
3. Was erhält man, wenn man die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} bildet?
4. Wie geht man vor, um die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f zu bestimmen?
5. Was ist die Aufgabe der Umkehrfunktion f^{-1} der Funktion f? Nimm irgendeinen x-Wert und berechne mit untenstehendem f den zugehörigen y-Wert. Setze diesen y-Wert als x-Wert in die Umkehrfunktion f^{-1} ein. Was stellst du fest?
$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = -2\,x + 6$$
6. Was ergibt der folgende Ausdruck?
$$f^{-1}\left(f(x)\right)$$
7. Was ergibt der folgende Ausdruck?
$$f\left(f^{-1}(x)\right)$$
8. Wie hängen die Graphen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} zusammen?

5.2 Lineare Funktionen

1. $f(x) = \frac{1}{2}\,x + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{3}\,x - 2$
3. $f(x) = 2\,x + 1.5$

5.3 Wurzelfunktionen

1. $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$
2. $f(x) = 2\,\sqrt{x+1} - 4$
3. $f(x) = -2\,\sqrt{x+9} + 4$

5.4 Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen sind nur eindeutig umkehrbar, wenn man den Definitionsbereich D ausgehend von der x-Koordinate des Scheitelpunkts einschränkt. Man wählt also
$$D_f =]-\infty\,;\,x_s] \quad \text{oder} \quad D_f = [x_s\,;\,\infty[$$
als Definitionsbereich.

1. $f(x) = (x+3)^2 - 4 \quad \text{mit} \quad D_f = [-3\,;\,\infty[$
2. $f(x) = \frac{1}{4}\,(x+4)^2 - 1 \quad \text{mit} \quad D_f = [-4\,;\,\infty[$
3. $f(x) = \frac{1}{4}\,(x-4)^2 - 9 \quad \text{mit} \quad D_f = [4\,;\,\infty[$
4. $f(x) = (x+3)^2 - 4 \quad \text{mit} \quad D_f =]-\infty\,;\,-3]$
5. $f(x) = \frac{1}{4}\,(x+4)^2 - 1 \quad \text{mit} \quad D_f =]-\infty\,;\,-4]$
6. $f(x) = \frac{1}{4}\,(x-4)^2 - 9 \quad \text{mit} \quad D_f =]-\infty\,;\,4]$

5.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Wenn man z.B. die Kreisfläche A aus dem Radius r berechnen will, benutzt man die bestens bekannte Formel $A = r^2\,\pi$. Will man hingegen den Radius aus der Kreisfläche bestimmen, muss man die Formel nach r umstellen, gemäss

$$A = r^2\,\pi \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{A}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

d.h. der Rechenvorgang wird „umgekehrt". Wenn man diese Formeln als Zuordnungsvorschriften von Funktionen schreibt, d.h. in der Form $f(x)$, erhält man

$$A(r) = r^2\,\pi \quad \text{bzw.} \quad r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

2. Umstellen der Formel nach t ergibt

$$s = \frac{g}{2}\,t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{2\,s}{g} \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,s}{g}}$$

bzw. als Zuordnungsvorschriften von Funktionen, d.h. in der Form $f(x)$, geschrieben

$$s(t) = \frac{g}{2}\,t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t(s) = \sqrt{\frac{2\,s}{g}}$$

3. Wieder die ursprüngliche Funktion f, d.h. zweimaliges „Umkehren" hebt sich auf.

4. Der Ausdruck $f(x)$ wird durch y ersetzt und die Zuordnungsvorschrift nach x umgestellt

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\,x + 3 \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}\,x \Leftrightarrow -2\,(y-3) = x \Leftrightarrow x = -2\,y + 6$$

Danach werden x und y vertauscht sowie y durch den Ausdruck $f^{-1}(x)$ ersetzt

$$y = -2\,x + 6 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -2\,x + 6$$

Das Vertauschen der Variablen x und y wird nur in der Mathematik gemacht, da man sowohl die Funktion f wie auch die Umkehrfunktion f^{-1} in dasselbe xy-Koordinatensystem einzeichnen will.

5. Die Umkehrfunktion f^{-1} muss die Wirkung der Funktion f umkehren, d.h. rückgängig machen. Es gilt z.B.

$$f(-2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(4) = -2 \qquad \text{oder} \qquad f(4) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(1) = 4$$

d.h. f und f^{-1} heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf.

6. Es gilt

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

denn die Funktion f ordnet dem x-Wert einen y-Wert zu und die Umkehrfunktion f^{-1} muss den Vorgang umkehren, d.h. sie ordnet dem y-Wert wieder den x-Wert zu.

7. Es gilt

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

denn die Umkehrfunktion f^{-1} ordnet dem x-Wert einen y-Wert zu und die Funktion f muss den Vorgang umkehren, d.h. sie ordnet dem y-Wert wieder den x-Wert zu.

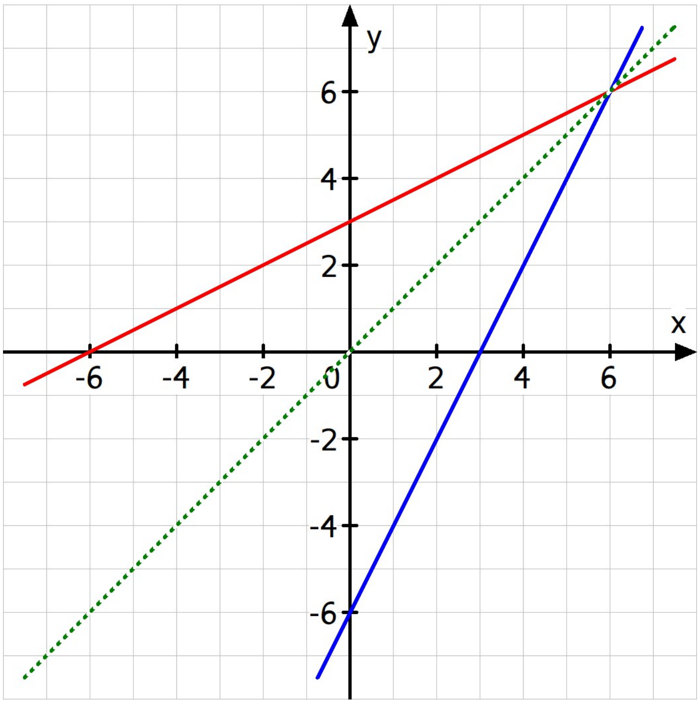
8. Die Graphen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1} gehen immer durch Spiegelung an der Identität $y = x$ auseinander hervor, d.h. die Schnittpunkte mit den Achsen sind vertauscht. Punkte welche in sich selbst gespiegelt werden, nennt man Fixpunkte.

5.2 Lineare Funktionen (Lösungen)

1. Für die Funktion f (rote Kurve) gilt $f(0) = 3$ und $x_n = -6$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 2y - 6 \Leftrightarrow y = 2x - 6 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 2x - 6$$

   Für die Umkehrfunktion f^{-1} (blaue Kurve) gilt $f^{-1}(0) = -6$ und $x_n = 3$.



   Wie man sieht, gehen die Graphen von f und f^{-1} durch Achsspiegelung an $y = x$ (Identität) auseinander hervor.

2. Für die Funktion f gilt $f(0) = -2$ und $x_n = 6$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 3x + 6$$

   Für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt $f^{-1}(0) = 6$ und $x_n = -2$.

3. Für die Funktion f gilt $f(0) = 1.5$ und $x_n = -0.75$.

$$f(x) = 2x + 1.5 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 0.75$$

   Für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt $f^{-1}(0) = -0.75$ und $x_n = 1.5$.

5.3 Wurzelfunktionen (Lösungen)

1. Der Graph der Funktion f (rote Kurve) ist in den Punkt $P(-4\,;\,-3)$ verschoben, denn für den Definitions- und Wertebereich gilt

$$x+4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = [-4\,;\,\infty[\quad \text{bzw.} \quad W_f = [-3\,;\,\infty[$$

Ausserdem gilt $f(0) = -1$ und $x_n = 5$ für die Schnittstellen mit den Achsen.

Die Berechnung der Umkehrfunktion gemäss

$$y = \sqrt{x+4} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad y+3 = \sqrt{x+4} \quad \Leftrightarrow \quad (y+3)^2 = x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x = (y+3)^2 - 4$$

ergibt nach dem Vertauschen der Variablen

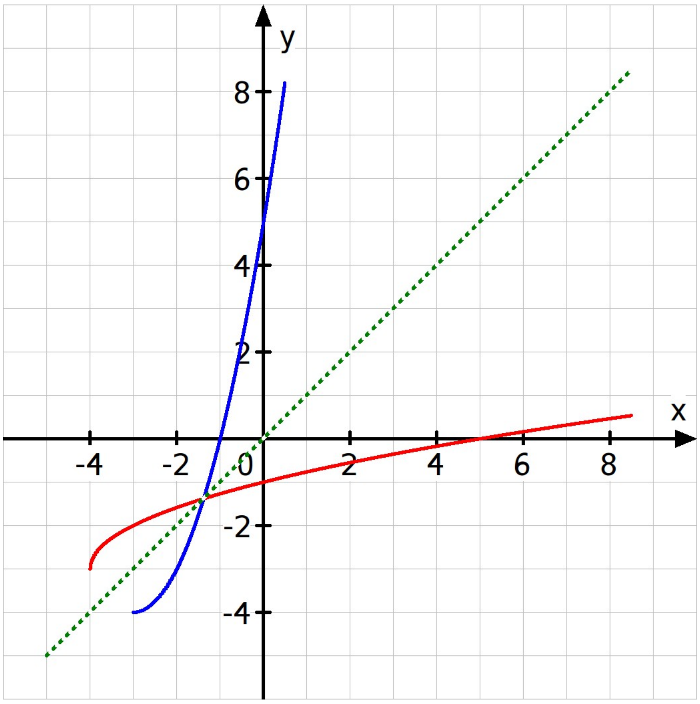
$$y = (x+3)^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 4$$

und damit den Scheitelpunkt $S(-3\,;\,-4)$ sowie

$$D_{f^{-1}} = [-3\,;\,\infty[\quad \text{und} \quad W_{f^{-1}} = [-4\,;\,\infty[$$

für Definitions- bzw. Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} (blaue Kurve).

Ausserdem gilt $f^{-1}(0) = 5$ und $x_n = -1$ für die Schnittstellen mit den Achsen.



- Wie man sieht, gehen die Graphen von f und f^{-1} durch Achsspiegelung an $y = x$ (Identität) auseinander hervor.
- Bei der Berechnung der Umkehrfunktion wurde die Wurzelgleichung

$$y+3 = \sqrt{x+4}$$

quadriert, d.h. man muss sich Gedanken zum Thema Scheinlösungen machen. Wegen

$$y \in W_f = [-3\,;\,\infty[\quad \text{gilt} \quad y \geq -3 \quad \text{und} \quad y+3 \geq 0$$

und damit kann auch kein Vorzeichen verloren gehen beim Quadrieren, was die Operation äquivalent macht.

2. Der Graph der Funktion f (rote Kurve) ist in den Punkt $P(-1\,;\,-4)$ verschoben, denn für den Definitions- und Wertebereich gilt

$$x+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = [-1\,;\,\infty[\quad \text{bzw.} \quad W_f = [-4\,;\,\infty[$$

Ausserdem gilt $f(0) = -2$ und $x_n = 3$ für die Schnittstellen mit den Achsen.

Die Berechnung der Umkehrfunktion gemäss

$$y = 2\sqrt{x+1} - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y+4) = \sqrt{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}(y+4)^2 - 1$$

ergibt nach dem Vertauschen der Variablen

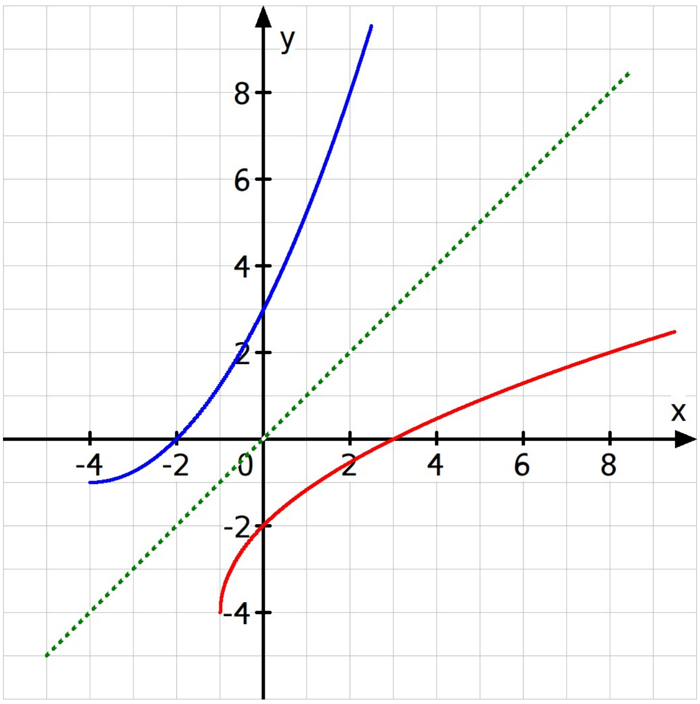
$$y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 1$$

und damit den Scheitelpunkt $S(-4\,;\,-1)$ sowie

$$D_{f^{-1}} = [-4\,;\,\infty[\quad \text{und} \quad W_{f^{-1}} = [-1\,;\,\infty[$$

für Definitions- bzw. Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} (blaue Kurve).

Ausserdem gilt $f^{-1}(0) = 3$ und $x_n = -2$ für die Schnittstellen mit den Achsen.



- Wie man sieht, gehen die Graphen von f und f^{-1} durch Achsspiegelung an $y = x$ (Identität) auseinander hervor.
- Wegen
$$y \in W_f = [-4\,;\,\infty[$$
können beim Quadrieren von
$$\frac{1}{2}(y+4) = \sqrt{x+1}$$
keine Scheinlösungen entstehen, da kein Vorzeichen verloren geht.

3. Der Graph der Funktion f (rote Kurve) ist in den Punkt $P(-9\,;4)$ verschoben, denn für den Definitions- und Wertebereich gilt

$$x+9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = [-9\,;\infty[\quad \text{bzw.} \quad W_f =]-\infty\,;4]$$

Ausserdem gilt $f(0) = -2$ und $x_n = -5$ für die Schnittstellen mit den Achsen.

Die Berechnung der Umkehrfunktion gemäss

$$y = -2\sqrt{x+9}+4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(y-4) = \sqrt{x+9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}(y-4)^2-9$$

ergibt nach dem Vertauschen der Variablen

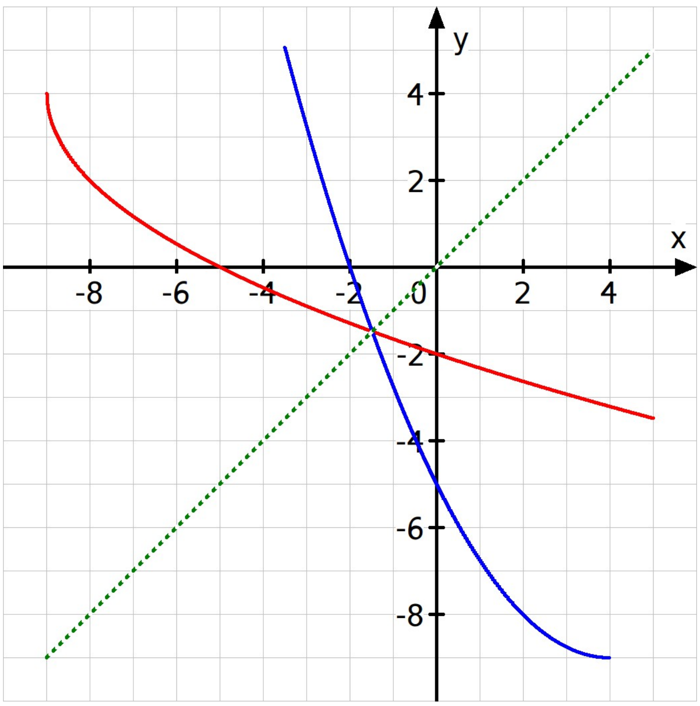
$$y = \frac{1}{4}(x-4)^2-9 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2-9$$

und damit den Scheitelpunkt $S(4\,;-9)$ sowie

$$D_{f^{-1}} =]-\infty\,;4] \quad \text{und} \quad W_{f^{-1}} = [-9\,;\infty[$$

für Definitions- bzw. Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} (blaue Kurve).

Ausserdem gilt $f^{-1}(0) = -5$ und $x_n = -2$ für die Schnittstellen mit den Achsen.



- Wie man sieht, gehen die Graphen von f und f^{-1} durch Achsspiegelung an $y = x$ (Identität) auseinander hervor.
- Wegen
$$y \in W_f =]-\infty\,;4]$$
können beim Quadrieren von
$$-\frac{1}{2}(y-4) = \sqrt{x+9}$$
keine Scheinlösungen entstehen, da kein Vorzeichen verloren geht.