3 Funktionen

In diesem Arbeitsblatt geht es um Begriffe wie lineare und quadratische Funktionen, Schnittpunkte mit y- und x-Achse, y-Achsenabschnitt und Nullstelle.

3.1 Wissensfragen

...

3.2 Lineare Funktionen

...

3.3 Quadratische Funktionen Sonderformen

Siehe dazu den Abschnitt 8.4 in der Formelsammlung. Diskutiere die folgenden quadratischen Funktionen, d.h. bestimme ...

1. den Schnittpunkt mit der y-Achse.
2. die Nullstellen x_1 und x_2.
3. den Scheitelpunkt S.
4. den Graphen der Funktion f, d.h. zeichne die wichtigen Punkte und die Kurve.

1. $f(x) = 2x^2 - 8$
2. $f(x) = 0.5x^2 + 2.5$
3. $f(x) = -2x^2 - 12$
4. $f(x) = 0.25x^2 - 1$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x$
6. $f(x) = -0.25x^2 + 4x$

3.4 Scheitelpunktform bestimmen

Siehe dazu den Abschnitt 8.4 in der Formelsammlung, Stichwort „Scheitelpunktform und quadratische Ergänzung".

1. $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$
2. $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$
3. $f(x) = -0.25x^2 + x$
4. $f(x) = -2x^2 - 2x + \frac{5}{2}$
5. $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + 1$
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$

3.5 Quadratische Funktionen Diskussion

Siehe dazu den Abschnitt 8.4 in der Formelsammlung. Diskutiere die folgenden quadratischen Funktionen, d.h. bestimme ...

1. den Schnittpunkt mit der y-Achse.
2. die Scheitelpunktform und damit den Scheitelpunkt S.
3. die faktorisierte Form und damit die Nullstellen x_1 und x_2.
4. den Graphen der Funktion f, d.h. zeichne die wichtigen Punkte und die Kurve.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
2. $f(x) = 0.5x^2 + 3x + 2.5$
3. $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$
4. $f(x) = 0.25x^2 + x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
6. $f(x) = -x^2 + 5x - 1$

3.1 Wissensfragen (Lösungen)

...

3.2 Lineare Funktionen (Lösungen)

...

3.3 Quadratische Funktionen Sonderformen (Lösungen)

1. Es ist $f(x) = 2\,x^2 - 8$ und damit findet man $f(0) = -8$ sowie den Scheitelpunkt $S(0\,;\,-8)$. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man
$$f(x) = 2\,(x^2 - 4) = 2\,(x+2)\,(x-2) = 0$$
und damit die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 2$.
2. Es ist $f(x) = 0.5\,x^2 + 2.5$ und damit findet man $f(0) = 2.5$ sowie den Scheitelpunkt $S(0\,;\,2.5)$. Eine Linearfaktorzerlegung findet man hier nicht, denn mit
$$f(x) = 0.5\,(x^2 + 5) = 0$$
und wegen $x^2 + 5 \geq 5$ gibt es keine Linearfaktoren und somit auch keine Nullstellen.
3. Es ist $f(x) = -2\,x^2 - 12$ und damit findet man $f(0) = -12$ sowie den Scheitelpunkt $S(0\,;\,-12)$. Eine Linearfaktorzerlegung findet man hier nicht, denn mit
$$f(x) = -2\,(x^2 + 6) = 0$$
und wegen $x^2 + 6 \geq 6$ gibt es keine Linearfaktoren und somit auch keine Nullstellen.
4. Es ist $f(x) = 0.25\,x^2 - 1$ und damit findet man $f(0) = -1$ sowie den Scheitelpunkt $S(0\,;\,-1)$. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man
$$f(x) = 0.25\,(x^2 - 4) = 0.25\,(x+2)\,(x-2) = 0$$
und damit die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 2$.
5. Es ist $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x$ und damit auch $c = 0$, d.h. $f(0) = 0$. Mittels Ausklammern findet man
$$f(x) = 2\,x\,(x-2) = 0$$
und damit die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Der Scheitelpunkt liegt genau in deren Mitte, d.h. es ist $x_s = 1$ und wegen $y_s = f(x_s) = f(1) = -2$ gilt $S(1\,;\,-2)$.
6. Es ist $f(x) = -0.25\,x^2 + 4\,x$ und damit auch $c = 0$, d.h. $f(0) = 0$. Mittels Ausklammern findet man
$$f(x) = -0.25\,x\,(x-16) = 0$$
und damit die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 16$. Der Scheitelpunkt liegt genau in deren Mitte, d.h. es ist $x_s = 8$ und wegen $y_s = f(x_s) = f(8) = 16$ gilt $S(8\,;\,16)$.

Bemerkungen:

- Wenn in der allgemeinen Form $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ der Summand $b\,x$ fehlt, dann muss $b = 0$ gelten und es liegt die Sonderform $f(x) = a\,x^2 + c$ vor. Weil das x hier nur in geraden Potenzen vorkommt, spielt dessen Vorzeichen keine Rolle, was wiederum bedeutet, dass der Graph von solchen Funktionen symmetrisch zur y-Achse ist und der Scheitelpunkt bei $S(0\,;c)$ liegt. Falls es Nullstellen gibt, unterscheiden sich diese nur im Vorzeichen.
- Wenn in der allgemeinen Form $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ der Summand c fehlt, dann muss $c = 0$ gelten und es liegt die Sonderform $f(x) = a\,x^2 + b\,x$ vor. Da man ein x ausklammern kann, liegt immer eine der beiden Nullstellen bei $x_1 = 0$ und die Nullstelle x_2 lässt sich beim zweiten Linearfaktor ablesen. Die Koordinate x_s des Scheitelpunktes $S(x_s\,;\,y_s)$ liegt genau zwischen den Nullstellen und $y_s = f(x_s)$ lässt sich durch Einsetzen in die Funktion berechnen.

3.4 Scheitelpunktform bestimmen (Lösungen)

1. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = 2$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5\,x^2 + 2\,x + 3 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x\right) + 3 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2\right) - 0.5 \cdot 2^2 + 3 \\ &= 0.5\,(x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

   und der Scheitelpunkt liegt bei $S\,(-2\,;\,1)$.

2. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = 3$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x^2 + 12\,x + 17 \\ &= 2\,\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\right) + 17 \\ &= 2\,\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2\right) - 2 \cdot 3^2 + 17 \\ &= 2\,(x+3)^2 - 1 \end{aligned}$$

   und der Scheitelpunkt liegt bei $S\,(-3\,;\,-1)$.

3. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = 2$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.25\,x^2 + x \\ &= -0.25\,\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right) \\ &= -0.25\,\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2\right) + 0.25 \cdot 2^2 \\ &= -0.25\,(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

   und der Scheitelpunkt liegt bei $S\,(2\,;\,1)$.

4. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = \frac{1}{2}$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,x^2 - 2\,x + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x\right) + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \\ &= -2\,\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

   und der Scheitelpunkt liegt bei $S\,\left(-\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

5. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = \frac{1}{3}$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{2}{3}\,x + 1 \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ &= -\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{10}{9}\right)$. Wenn man den Graphen $G(f)$ der Funktion f zeichnen müsste, wäre eine Skalierung von $9H = 1E$ sicher sinnvoll.

6. Es gilt die quadratische Ergänzung mit $b = \frac{2}{3}$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{4}{9}\,x + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x\right) + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{27} \end{aligned}$$

und der Scheitelpunkt liegt bei $S\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{27}\right)$. Wenn man den Graphen $G(f)$ der Funktion f zeichnen müsste, wäre eine Skalierung von $27H = 1E$ sicher sinnvoll, wobei man dann nur noch einen kleinen Ausschnitt davon zeichnen könnte.

Bemerkungen:

- Bei der quadratischen Ergänzung arbeitet man immer mit dem 1. oder 2. Binom, d.h. mit

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)^2$$

oder

$$a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)^2$$

und es muss immer der Summand b^2 ergänzt, d.h. addiert, werden. Ausserdem benötigt man immer den Faktor 2 im Mittelglied.

- Während den Prüfungen machen die Studierenden am meisten Fehler beim Ausklammern des Streckungsfaktors und beim Abspalten der Zahl 2 für das Mittelglied des Binoms. Nach dem ersten Rechenschritt sollte man daher die faktorisierte Form zwecks Kontrolle wieder ausmultiplizieren, z.B.

$$\frac{1}{3}\left(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x\right) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{4}{9}\,x$$

in der 6. Aufgabe, siehe oben.

3.5 Quadratische Funktionen Diskussion (Lösungen)

1. Es ist $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6$ und damit gilt $f(0) = -6$ sowie die quadratische Ergänzung mit $b = 1$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,\left(x^2 - 2\cdot 1\cdot x\right) - 6 \\ &= 2\,\left(x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2\right) - 2\cdot 1^2 - 6 \\ &= 2\,(x-1)^2 - 8, \end{aligned}$$

d.h. $S(1\,;\,-8)$ ist der Scheitelpunkt. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$f(x) = 2\,\left(x^2 - 2\,x - 3\right) = 2\,(x+1)\,(x-3) = 0$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

2. Es ist $f(x) = 0.5\,x^2 + 3\,x + 2.5$ und damit gilt $f(0) = 2.5$ sowie die quadratische Ergänzung mit $b = 3$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.5\,\left(x^2 + 2\cdot 3\cdot x\right) + 2.5 \\ &= 0.5\,\left(x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2\right) - 0.5\cdot 3^2 + 2.5 \\ &= 0.5\,(x+3)^2 - 2, \end{aligned}$$

d.h. $S(-3\,;\,-2)$ ist der Scheitelpunkt. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$f(x) = 0.5\,\left(x^2 + 6\,x + 5\right) = 0.5\,(x+5)\,(x+1) = 0$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$.

3. Es ist $f(x) = -2\,x^2 + 16\,x - 24$ und damit gilt $f(0) = -24$ sowie die quadratische Ergänzung mit $b = 4$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,\left(x^2 - 2\cdot 4\cdot x\right) - 24 \\ &= -2\,\left(x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 4^2\right) + 2\cdot 4^2 - 24 \\ &= -2\,(x-4)^2 + 8, \end{aligned}$$

d.h. $S(4\,;\,8)$ ist der Scheitelpunkt. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$f(x) = -2\,\left(x^2 - 8\,x + 12\right) = -2\,(x-2)\,(x-6) = 0$$

und damit die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

4. Es ist $f(x) = 0.25\,x^2 + x - 3$ und damit gilt $f(0) = -3$ sowie die quadratische Ergänzung mit $b = 2$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.25\,\left(x^2 + 2\cdot 2\cdot x\right) - 3 \\ &= 0.25\,\left(x^2 + 2\cdot 2\cdot x + 2^2\right) - 0.25\cdot 2^2 - 3 \\ &= 0.25\,(x+2)^2 - 4, \end{aligned}$$

d.h. $S(-2\,;\,-4)$ ist der Scheitelpunkt. Mittels Linearfaktorzerlegung findet man

$$f(x) = 0.25\,\left(x^2 + 4\,x - 12\right) = 0.25\,(x+6)\,(x-2) = 0$$

und damit die Nullstellen $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$.

5. Es ist $f(x) = x^2 - 3\,x + 1$ und damit gilt $f(0) = 1$ sowie die quadratische Ergänzung mit Streckungsfaktor 1 und $b = 3/2$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 1 \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

d.h. $S(1.5\,;\,-1.25)$ ist der Scheitelpunkt. Eine Linearfaktorzerlegung findet man hier nicht, aber mit der Diskriminante $D = b^2 - 4\,a\,c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ und dem Taschenrechner ist

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.5 \pm 1.12$$

und die Nullstellen liegen bei $x_1 \approx 0.38$ sowie $x_2 \approx 2.62$.

6. Es ist $f(x) = -x^2 + 5\,x - 1$ und damit gilt $f(0) = -1$ sowie die quadratische Ergänzung mit Streckungsfaktor -1 und $b = 5/2$ gemäss

$$\begin{aligned} f(x) &= -1\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x\right) - 1 \\ &= -1\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 1\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 \\ &= -1\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - \frac{4}{4} \\ &= -1\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}, \end{aligned}$$

d.h. $S(2.5\,;\,5.25)$ ist der Scheitelpunkt. Eine Linearfaktorzerlegung findet man hier nicht, aber mit der Diskriminante $D = b^2 - 4\,a\,c = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 21$ und dem Taschenrechner ist

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2.5 \pm 2.29$$

und die Nullstellen liegen bei $x_1 \approx 0.21$ sowie $x_2 \approx 4.79$.