2 Vektoren

In diesem Arbeitsblatt geht es um Begriffe wie Skalar, Vektor, Betrag und Richtungswinkel eines Vektors.

2.1 Wissensfragen

...

2.2 Aufgaben Geometriebuch

Löse die Aufgaben 3, 4, 8 und 19 von S. 245 aus dem Geometriebuch.

2.1 Wissensfragen (Lösungen)

...

2.2 Aufgaben 3 und 4 (Lösungen)

3. a) Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck und daher gilt mit $G = b$, $A = a$, $H = c$ und Pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 15^2} = 15.3 \quad \text{sowie} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{15}{3}\right) = 78.7°.$$

b) Wenn man das Koordinatensystem so legt, dass der Vektor $\vec{a}$ auf die positive x-Halbachse zu liegen kommt, dann gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Richtungswinkel des Vektors $\vec{b}$ ist $\beta = 180° - \alpha = 180° - 118° = 62°$. Damit und mit $G = b_y$, $A = b_x$ sowie $H = b$ kann man die kartesischen Koordinaten von $\vec{b}$ berechnen gemäss

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\,\cos(\beta) \\ b\,\sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,\cos(62°) \\ 5\,\sin(62°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.35 \\ 4.41 \end{pmatrix}$$

und wegen $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ auch die kartesischen Koordinaten von $\vec{c}$ gemäss

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b_x \\ 0 + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 2.35 \\ 0 + 4.41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ 4.41 \end{pmatrix}.$$

Die polaren Koordinaten von $\vec{c}$ berechnen sich $G = c_y$, $A = c_x$ sowie $H = c$ gemäss

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{10.4^2 + 4.41^2} = 11.2 \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \arctan\left(\frac{4.41}{10.4}\right) = 23.1°.$$

Der Richtungswinkel φ ist abhängig davon, wie man das Koordinatensystem wählt und daher willkürlich.

4. Wenn man das Koordinatensystem so legt, dass der Vektor $\vec{b}$ auf die positive x-Halbachse zu liegen kommt und der Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ auf die positive y-Halbachse, dann gilt

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Richtungswinkel des Vektors $\vec{c}$ ist $\gamma = 180° - \beta = 180° - 132° = 48°$. Damit und mit $G = c_y$, $A = c_x$ sowie $H = c$ kann man die kartesischen Koordinaten von $\vec{c}$ berechnen gemäss

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\cos(\gamma) \\ c\,\sin(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,\cos(48°) \\ 9\,\sin(48°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.02 \\ 6.69 \end{pmatrix}.$$

Der Winkel $\alpha = 104°$ ist der Richtungswinkel des Gegenvektors $-\vec{a}$, d.h. es gilt

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} a\,\cos(\alpha) \\ a\,\sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,\cos(104°) \\ 6\,\sin(104°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.45 \\ 5.82 \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.45 \\ -5.82 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ berechnen sich die kartesischen Koordinaten von $\vec{d}$ gemäss

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b + c_x \\ a_y + 0 + c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.45 + 7 + 6.02 \\ -5.82 + 0 + 6.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 \\ 0.867 \end{pmatrix}$$

und die polaren Koordinaten gemäss

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{14.5^2 + 0.867^2} = 14.5 \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \arctan\left(\frac{0.867}{14.5}\right) = 3.43^\circ.$$

Der Winkel φ ist abhängig davon, wie man das Koordinatensystem wählt und daher willkürlich.

2.3 Aufgabe 8 (Lösungen)

8. Die Frage lautet: wie kann man z.B. den Vektor $\vec{r_a}$ durch Vielfache der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausdrücken?

a) Durch Probieren findet man

$$\vec{r_a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

d.h. vom Anfangspunkt von $\vec{r_a}$ geht man zweimal um $\vec{a}$ nach oben und von dort zweimal um den Gegenvektor $-\vec{b}$ nach unten links und ist dann beim Endpunkt von $\vec{r_a}$. Man kann (und sollte) die Rechnung auch rechnerisch lösen gemäss

$$\vec{r_a} = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,x + 2\,y \\ 4\,x + 1\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

d.h. man löst das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0\,x & + & 2\,y & = & -4 \\ 4\,x & + & 1\,y & = & 6 \end{array}$$

und findet dadurch die beiden Skalare $x = 2$ und $y = -2$, mit welchen man die Vektoren $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ multiplizieren muss, um den Vektor $\vec{r_a}$ zu erhalten.

b) Wegen

$$\vec{r_b} = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,x + 2\,y \\ 4\,x + 1\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

löst das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0\,x & + & 2\,y & = & 6 \\ 4\,x & + & 1\,y & = & -2 \end{array}$$

und erhält die Skalare $x = -\frac{5}{4}$ und $y = 3$.

c) Wegen

$$\vec{r_c} = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,x + 2\,y \\ 4\,x + 1\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

löst das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0\,x & + & 2\,y & = & -4 \\ 4\,x & + & 1\,y & = & -5 \end{array}$$

und erhält die Skalare $x = -\frac{3}{4}$ und $y = -2$.

2.4 Aufgabe 19 (Lösungen)

19. Es handelt sich um rechtwinklige Dreiecke und daher gilt mit Pythagoras

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \wedge \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b_y}{b_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1°$$

bzw. mit $c_x = -1$ und $c_y = -6$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = 6.08 \quad \wedge \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-6}{-1}\right) = 80.5°$$

und mit $d_x = -2$ und $d_y = 2$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2.83 \quad \wedge \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) = -45.0°$$

Die polaren Formen sind also $\vec{b} = (5\,;\,53.1°)$, $\vec{c} = (6.08\,;\,260.5°)$ und $\vec{d} = (2.83\,;\,135°)$.