16 Wurzelgleichungen 2

Siehe dazu die Abschnitte 4.2 und 4.8 in der Formelsammlung.

16.1 Wissensfragen

1. Wann spricht man von einer Wurzelgleichung?
2. Warum ist es keine gute Idee bei der folgenden Gleichung direkt zu quadrieren?
$$\sqrt{x} + 1 = x$$
3. Gib ein Beispiel für ein Wurzelgleichung welche nur eine Scheinlösung hat.

16.2 Wurzelgleichungen mit einem Linearfaktor

Löse die folgenden Gleichungen und gib den Definitionsbereich sowie die Lösungsmenge an.

1. $\sqrt{x+1} = x - 1$
2. $\sqrt{x+4} = x - 2$
3. $\sqrt{x-1} = x - 7$
4. $\sqrt{5-x} = x - 5$
5. $4 + \sqrt{x+2} = x$
6. $x + \sqrt{x-10} = 10$
7. $\sqrt{17-x} - x = 3$
8. $\sqrt{x+6} = 14 - x$
9. $\sqrt{7-x} = 5 - x$
10. $\sqrt{16-x} + 11 = 2\,x$
11. $\sqrt{x+23} - 2\,x = 1$
12. $\sqrt{2\,x+3} = 4\,(1-x)$

Bemerkungen zu diesem Gleichungstyp:

- Verwende den Ausdruck x_s für die Scheinlösung(en).
- Schaffe zuerst die Wurzel auf die linke und alles andere auf die rechte Seite bevor du quadrierst.
- In den Prüfungen geht beim Quadrieren häufig das Mittelglied des 1. oder 2. Binoms vergessen, d.h. die Studierenden setzen fälschlicherweise
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad (a-b)^2 = a^2 - b^2$$
anstatt
$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \quad \text{bzw.} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

16.3 Verschachtelte Wurzelgleichung

Löse die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an, ohne den Definitionsbereich zu bestimmen.

1. $\sqrt{2\,x + \sqrt{4\,x-3}} = 3$
2. $\sqrt{3\,x + \sqrt{3\,x-2}} = 2$
3. $\sqrt{2\,x + \sqrt{x+3}} = 2$

16.1 Wissensfragen (Lösungen)

Im Folgenden ist mit Abschnitt 4.1 jener aus der Formelsammlung gemeint.

1. Wenn mindestens ein x unter einer Wurzel steht.
2. Wenn man die Summe auf der linken Seite quadriert ergibt sich ein Binom, d.h. man erhält ein Mittelglied, welches wieder ein Wurzel von x enthält.

   $$\sqrt{x}+1=x \quad\Rightarrow\quad (\sqrt{x}+1)^2=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x+2\sqrt{x}+1=x^2$$

   Der Sinn des Quadrierens ist aber, dass die Wurzel verschwindet. Besser ist, wenn man zuerst minus Eins rechnet und dann erst quadriert.

   $$\sqrt{x}+1=x \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}=x-1 \quad\Rightarrow\quad x=x^2-2x+1$$

   Ein Mittelglied erhält man auch hier, aber es enthält keine Wurzel mehr.
3. Weil eine Quadratwurzel keine negativen Werte zurückgeben kann, hat die folgende Gleichung keine Lösung.

   $$\sqrt{x}=-2$$

   Wenn man die Gleichung beidseitig quadriert erhält man die Scheinlösung $x=4$, welche eingesetzt in die Ausgangsgleichung einen Widerspruch ergibt.

16.2 Wurzelgleichungen mit einem Linearfaktor (Lösungen)

1. $D=[-1\,;\,\infty[$ und $L=\{3\}$ mit $x_s=0$
2. $D=[-4\,;\,\infty[$ und $L=\{5\}$ mit $x_s=0$
3. $D=[1\,;\,\infty[$ und $L=\{10\}$ mit $x_s=5$
4. $D=]-\infty\,;\,5]$ und $L=\{5\}$ mit $x_s=4$
5. $D=[-2\,;\,\infty[$ und $L=\{7\}$ mit $x_s=2$
6. $D=[10\,;\,\infty[$ und $L=\{10\}$ mit $x_s=11$
7. $D=]-\infty\,;\,17]$ und $L=\{1\}$ mit $x_s=-8$
8. $D=[-6\,;\,\infty[$ und $L=\{10\}$ mit $x_s=19$
9. $D=]-\infty\,;\,7]$ und $L=\{3\}$ mit $x_s=6$
10. $D=]-\infty\,;\,16]$ und $L=\{7\}$ mit $x_s=\frac{15}{4}$
11. $D=[-23\,;\,\infty[$ und $L=\{2\}$ mit $x_s=-\frac{11}{4}$
12. $D=[-1.5\,;\,\infty[$ und $L=\{0.5\}$ mit $x_s=\frac{13}{8}$

16.3 Verschachtelte Wurzelgleichung (Lösung)

1. Quadrieren liefert eine erste Gleichung, welche nur noch eine Wurzel enthält, gemäss

   $$\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3 \quad\Rightarrow\quad 2x+\sqrt{4x-3}=9 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{4x-3}=-2x+9$$

   und erneutes Quadrieren liefert eine quadratische Gleichung gemäss

   $$\sqrt{4x-3}=-2x+9 \quad\Rightarrow\quad 4x-3=4x^2-36x+81 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2-40x+84=0$$

   wobei man das Mittelglied des Binoms nicht vergessen darf. Die quadratische Gleichung kann man gemäss

   $$4\left(x^2-10x+21\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4(x-7)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=7 \quad\wedge\quad x_2=3$$

   lösen. Weil mindestens einmal quadriert wurde, muss man mögliche Lösungen gemäss Abschnitt 4.1 in die Anfangsgleichung einsetzen, was zu der Scheinlösung $x_s=7$ und der Lösungsmenge $L=\{3\}$ führt.
2. Scheinlösung $x_s=2$ und Lösungsmenge $L=\{1\}$.
3. Scheinlösung $x_s=\frac{13}{4}$ und Lösungsmenge $L=\{1\}$.