15 Quadratische Gleichungen

Siehe dazu den Abschnitt 4.4 in der Formelsammlung.

15.1 Wissensfragen

1. Auf welche Form kann man jede quadratische Gleichung bringen?
2. Wie lautet der Definitionsbereich D einer quadratischen Gleichung?
3. Können beim Lösen einer quadratischen Gleichung Scheinlösungen entstehen?
4. Was ist speziell an der folgenden Gleichung?

$$4\,x^2 - 9 = 0$$

5. Was ist speziell an der folgenden Gleichung?

$$4\,x^2 - 9\,x = 0$$

6. Was gilt für den Sonderfall mit $b = 0$ bez. Lösungen?
7. Was gilt für den Sonderfall mit $c = 0$ bez. Lösungen?
8. Falls man mit der *abc*-Formel arbeitet, wieso sollte man zuerst die Diskriminante D_i berechnen?
9. Wie löst man die folgende Gleichung am schnellsten?

$$3\,x^2 + 6\,x + 3 = 0$$

10. Wie löst man die folgende Gleichung am schnellsten?

$$-2\,x^2 - 6\,x + 20 = 0$$

11. Wieviele Lösungen kann eine quadratische Gleichung maximal haben?
12. Wieviele Lösungen muss eine quadratische Gleichung mindestens haben?
13. Wenn man eine quadratische Gleichung lösen muss, wie sollte man vorgehen?

15.1 Wissensfragen (Lösungen)

Im Folgenden ist mit Abschnitt 4.1 jener aus der Formelsammlung gemeint.

1. Auf die sogenannt allgemeine Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

2. Es gilt immer $D = \mathbb{R}$, d.h. die Punkte 1, 3 und 5 von Abschnitt 4.1 sind nicht notwendig.
3. Nein, d.h. die Punkte 4 und 5 von Abschnitt 4.1 sind nicht notwendig.
4. Es gibt nur ein x^2 in der Gleichung, d.h. es handelt sich um den Sonderfall mit $b = 0$, welcher aus Zeitgründen nicht mit Hilfe der Diskriminante gelöst werden sollte.

$$4\,x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$$

5. Es gibt kein Konstantglied in der Gleichung, d.h. es handelt sich um den Sonderfall mit $c = 0$, welcher aus Zeitgründen nicht mit Hilfe der Diskriminante gelöst werden sollte.

$$4\,x^2 - 9\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x\left(x - \frac{9}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{9}{4}$$

6. Im Sonderfall mit $b = 0$ unterscheiden sich die beiden Lösungen, falls es welche gibt, nur im Vorzeichen.
7. Im Sonderfall mit $c = 0$ ist eine der beiden Lösungen, welche immer existieren, $x_1 = 0$.
8. Für $D_i < 0$ gilt immer $L = \{\}$, d.h. man muss die *abc*-Formel nicht hinschreiben.
9. Nach dem Ausklammern eines konstanten Faktors handelt es sich um ein Binom und kann daher sehr schnell durch weiteres Faktorisieren gelöst werden.

$$3\,x^2 + 6\,x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,(x^2 + 2\,x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,(x+1)^2 = 0$$

In einem solchen Fall gilt immer $D_i = 0$, d.h. es gibt nur eine Lösung, hier $x = -1$.

10. Nach dem Ausklammern eines konstanten Faktors kann man den quadratischen Ausdruck in Linearfaktoren zerlegen.

$$-2\,x^2 - 6\,x + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\,(x^2 + 3\,x - 10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\,(x-2)\,(x+5) = 0$$

Die Lösungen lauten dann $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$.

11. Wegen x^2 kann es max. zwei Linearfaktoren und damit auch nur max. zwei Nullstellen geben.
12. Es gibt quadratische Gleichungen welche keine Lösung haben, z.B.

$$x^2 + 1 = 0$$

13. Es geht um Geschwindigkeit:
    a) Handelt es sich um eine Sonderform mit $b = 0$ oder $c = 0$? Schnelle Lösungsmethode!
    b) Kann man einen konstanten Faktor ausklammern? Vereinfachen!
    c) Erkennt man ein Binom? Schnelle Lösungsmethode durch Faktorisieren!
    d) Erkennt man eine Linearfaktorzerlegung? Schnelle Lösungsmethode durch Faktorisieren!
    e) Die Diskriminante berechnen und in die *abc*-Formel einsetzen nur als letzte Möglichkeit.