5 Polynome

In diesem Arbeitsblatt geht es um Begriffe wie Polynom, Polynomdivision ohne und mit Rest sowie Linearfaktor. Siehe dazu die Abschnitte 4.3 bis 4.6 in der Formelsammlung.

5.1 Wissensfragen

1. Was versteht man unter einem Polynom in x?
2. Was versteht man unter dem Grad eines Polynoms in x?
3. Welche Werte können die Exponenten der Potenzen eines Polynoms annehmen?
4. Wann genau geht eine Polynomdivision ohne Rest auf?
5. Was genau bedeutet der Begriff „echt gebrochen“ im Zusammenhang mit einer Polynomdivision?

Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad m und $q(x)$ eines vom Grad n. Jemand stellt folgende Behauptungen auf. Wahr oder falsch?

6. Wenn man p und q addiert oder subtrahiert erhält man in jedem Fall wieder ein Polynom.
7. Wenn man p und q multipiziert erhält man in jedem Fall wieder ein Polynom.
8. Wenn man p und q dividiert erhält man in jedem Fall wieder ein Polynom.
9. Der Grad des Polynoms $p + q$ ist $\geq m$ und $\geq n$.
10. Der Grad des Polynoms $p \cdot q$ ist $m - n$.
11. Der Grad des Polynoms $p : q$ ist $m - n$.

5.2 Polynomdivision

Die folgenden drei Polynomdivisionen unterscheiden sich nur im Konstantglied des Dividenden. Berechne je und schau dir den Rest und das Resultat der drei Divisionen gut an.

1. $\left(x^3 + 6x^2 + 11x + 5\right) : (x + 3)$
2. $\left(x^3 + 6x^2 + 11x + 6\right) : (x + 3)$
3. $\left(x^3 + 6x^2 + 11x + 7\right) : (x + 3)$

Beantworte anschliessend die folgenden drei Fragen.

4. Bei der zweiten Aufgabe ergibt sich kein Rest. Was bedeutet das für den Linearfaktor $x + 3$?
5. Bei der ersten Aufgabe ergibt sich ein Rest. Was bedeutet das für den Linearfaktor $x + 3$?
6. Bei der ersten und dritten Aufgabe ergibt sich ein Rest. Was zeigt das ganz allgemein für das Resultat einer jeden Polynomdivision?

5.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Eine Summe von Vielfachen von Potenzen in x mit natürlichen Exponenten, d.h.
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
mit $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.
2. Den höchsten vorkommenden Exponenten der Potenzen in x, d.h. n in obiger Formel.
3. Die Exponenten müssen natürliche Zahlen inkl. der Null sein, d.h. $n \in \mathbb{N}_0$ in obiger Formel.
4. Wenn der Divisor, d.h. der Nenner der Division, im Dividend als Faktor enthalten ist.
5. Wenn in einem Bruch $\frac{z}{n}$ im Nenner n die höheren Potenzen der Variable vorkommen als im Zähler z.
6. W
7. W
8. F, denn $(x+1) : x = 1 + x^{-1}$ z.B. ist kein Polynom.
9. F, denn $(x+1) + (-x+1) = 2$ z.B. hat den Grad Null.
10. F, der Grad ist $m + n$.
11. F, denn $p : q$ ist vielleicht gar kein Polynom.

5.2 Polynomdivision (Lösungen)

1. Der Rest ist -1 und das Resultat
$$x^2 + 3x + 2 + \frac{-1}{x+3}.$$
2. Kein Rest und das Resultat ist
$$x^2 + 3x + 2.$$
3. Der Rest ist 1 und das Resultat
$$x^2 + 3x + 2 + \frac{1}{x+3}.$$

Die Antworten zu den (dringensten) drei Fragen (des Lebens).

4. Das bedeutet, dass der Linearfaktor $x+3$ im Polynom $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ enthalten ist und es gilt
$$\left(x^2 + 3x + 2\right) \cdot (x+3) = \left(x^3 + 6x^2 + 11x + 6\right).$$
5. Das bedeutet, dass der Linearfaktor $x+3$ in den Polynomen $x^3 + 6x^2 + 11x + 5$ und $x^3 + 6x^2 + 11x + 7$ **nicht** enthalten ist. Es gilt aber trotzdem
$$\left(x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x+3}\right) \cdot (x+3) = \left(x^3 + 6x^2 + 11x + 5\right)$$
bzw.
$$\left(x^2 + 3x + 2 + \frac{1}{x+3}\right) \cdot (x+3) = \left(x^3 + 6x^2 + 11x + 7\right),$$
denn für eine Division $z : n = r$ gilt immer $r \cdot n = z$, wobei r hier für das Resultat steht.
6. Es zeigt, dass nicht jede Polynomdivison ein Polynom als Resultat liefert, denn das Resultat kann auch negative ganze Zahlen als Exponenten der Potenzen aufweisen. Vergleich dazu das Resultat der dritten Aufgabe, welches in der Form
$$x^2 + 3x + 2 + \frac{1}{x+3} = x^2 + 3x + 2 + (x+3)^{-1}$$
geschrieben werden kann.