3 Radizieren (Wurzelziehen)

In diesem Arbeitsblatt geht es um Begriffe wie Radizieren, Wurzel, Wurzelziehen, Zahlenmengen, Zahlen, irrationale Zahlen und Definitionsbereich. Siehe dazu den Abschnitt 2.6 in der Formelsammlung.

3.1 Wissensfragen

In diesem Abschnitt soll gelten $n \in \mathbb{N}$.

1. Erkläre mit Worten, was man unter $\sqrt{5}$ versteht.
2. Erkläre mit Worten, was man unter $\sqrt[3]{5}$ versteht.
3. Erkläre mit Worten, was man unter $\sqrt[n]{5}$ versteht.
4. Was genau legt also der Wurzelexponent n im Ausdruck $\sqrt[n]{r}$ fest?
5. Welche Formel in der FS Abschnitt 2.6 ist die wohl wichtigste?

Die folgenden Fragen beziehen sich auf den **Input** einer Wurzel, d.h. auf den Radikanden r.

6. Für welche Werte von r ist $\sqrt{r}$ definiert?
7. Für welche Werte von r ist $\sqrt[3]{r}$ definiert?
8. Für welche Werte von r ist $\sqrt[2n]{r}$ definiert?
9. Für welche Werte von r ist $\sqrt[2n-1]{r}$ definiert?
10. Für welche Werte von r ist $\sqrt{-r}$ definiert?

Die folgenden Fragen beziehen sich auf den **Output** einer Wurzel, d.h. auf den Wert, welchen eine Wurzel annehmen bzw. zurückgeben kann.

11. Welche Werte kann der Ausdruck $\sqrt[2n]{r}$ annehmen?
12. Welche Werte kann der Ausdruck $\sqrt[2n-1]{r}$ annehmen?

3.2 Zahlenmengen

Wahr oder falsch? Der Ausdruck $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bei Aufgabe 18 bezeichnet die irrationalen Zahlen.

1. $-1 \in \mathbb{N}$	2. $0 \in \mathbb{N}$	3. $1 \in \mathbb{N}$	4. $0 \in \mathbb{N}_0$	5. $\pm 1 \in \mathbb{Z}$	6. $0 \in \mathbb{Z}$
7. $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$	8. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$	9. $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$	10. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$	11. $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$	12. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
13. $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$	14. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$	15. $0 \notin \mathbb{Q}$	16. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$	17. $\sqrt{9} \notin \mathbb{Z}$	18. $1 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3.3 Wurzeln von Potenzen

Für welche Werte von x sind die Wurzeln definiert? Wo möglich sollen die Terme vereinfacht werden.

1. $\sqrt{x}$	2. $\sqrt{x^2}$	3. $\sqrt{x^3}$	4. $\sqrt{x^4}$	5. $\sqrt{-x}$	6. $\sqrt{-x^2}$
7. $\sqrt[3]{x}$	8. $\sqrt[3]{x^2}$	9. $\sqrt[3]{x^3}$	10. $\frac{1}{\sqrt{x}}$	11. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	12. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. $\sqrt{5}$ ist jene Zahl, welche man einmal mit sich selbst multiplizieren muss, damit man 5 erhält. Also gilt
$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5,$$
d.h. die Zahl $\sqrt{5}$ kann als Basis einer Potenz mit Exponent 2 aufgefasst werden.

2. $\sqrt[3]{5}$ ist jene Zahl, welche man zweimal mit sich selbst multiplizieren muss, damit man 5 erhält. Also gilt
$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5,$$
d.h. die Zahl $\sqrt[3]{5}$ kann als Basis einer Potenz mit Exponent 3 aufgefasst werden.

3. $\sqrt[n]{5}$ ist jene Zahl, welche man $(n-1)$-mal mit sich selbst multiplizieren muss, damit man 5 erhält. Also gilt
$$\left(\sqrt[n]{5}\right)^n = 5,$$
d.h. die Zahl $\sqrt[n]{5}$ kann als Basis einer Potenz mit Exponent n aufgefasst werden.

4. Der Wurzelexponent n legt fest, in wieviele gleich grosse Faktoren der Radikand r zerlegt werden soll.

5. Die Formel W1, weil sie definiert, was Radizieren bedeutet, nämlich die Frage nach der Basis. Es gilt
$$\sqrt[n]{r} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = r.$$

6. Der Radikand r muss grösser oder gleich Null sein, d.h. $r \in \mathbb{R}_0^+$, denn die Quadratwurzel kann nicht aus negativen Zahlen gezogen werden.

7. Der Radikand r kann jede reelle Zahl sein, d.h. $r \in \mathbb{R}$, denn eine Wurzel mit Wurzelexponent 3 kann auch aus negativen Zahlen gezogen werden.

8. Der Radikand r muss grösser oder gleich Null sein, d.h. $r \in \mathbb{R}_0^+$, denn eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten $2n$ kann nicht aus negativen Zahlen gezogen werden.

9. Der Radikand r kann jede reelle Zahl sein, d.h. $r \in \mathbb{R}$, denn eine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten $2n-1$ kann auch aus negativen Zahlen gezogen werden.

10. Der Radikand $-r$ muss grösser oder gleich Null sein, d.h. $r \in \mathbb{R}_0^-$.

11. Der Ausdruck $\sqrt[2n]{r}$ wird immer grösser oder gleich Null sein, denn eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten $2n$ kann keine negative Zahl zurückgeben. Es ist z.B. $\sqrt[4]{16} = 2$ und nicht $\sqrt[4]{16} = -2$.

12. Der Ausdruck $\sqrt[2n-1]{r}$ kann jede reelle Zahl sein, denn eine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten $2n-1$ kann auch negative Zahlen zurückgeben. Es ist z.B. $\sqrt[5]{32} = 2$ und $\sqrt[5]{-32} = -2$.

3.2 Zahlenmengen (Lösungen)

1. F	2. F	3. W	4. W	5. W	6. W
7. F	8. W	9. W	10. F	11. W	12. W
13. W	14. F	15. F	16. W	17. F	18. W

3.3 Wurzeln von Potenzen (Lösungen)

1. $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	2. $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	3. $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$
4. $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{x^4} = \lvert x^2\rvert = x^2$	5. $x \in \mathbb{R}_0^-$ und $\sqrt{-x} = (-x)^{\frac{1}{2}}$	6. $x = 0$ und $\sqrt{-x^2} = 0$
7. $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	8. $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$	9. $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt[3]{x^3} = x$
10. $x \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	11. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$	12. $x \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$