

# 1 Primzahlen, kgV und ggT

In diesem Arbeitsblatt geht es um Begriffe wie Primzahl, Primzahlzerlegung, Quersumme, alternierende Quersumme, Teilbarkeit, Teilungsregeln, kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches), kgN (kleinster gemeinsamer Nenner) und ggT (grösster gemeinsamer Teiler).

## 1.1 Wissensfragen

1. Was ist eine Primzahl?
2. Ist die natürliche Zahl 15 eine Primzahl?
3. Gib ein paar Beispiele für Primzahlen.
4. Warum ist die Zahl Zwei die einzige gerade Primzahl?
5. Was versteht man unter einer Primzahlzerlegung?
6. Was ist die Quersumme einer natürlichen Zahl?
7. Was ist die alternierende Quersumme einer natürlichen Zahl?
8. Wofür können (alternierende) Quersummen von natürlichen Zahlen verwendet werden?
9. Wofür ist das kgV bzw. der kgN nützlich?
10. Wofür ist der ggT nützlich?

## 1.2 Teilbarkeit

Siehe dazu die Abschnitte 2.2 und 2.5 in der Formelsammlung.  
Durch welche Primzahlen ist die Zahl 420 teilbar?

## 1.3 kgV und ggT

Berechne zu den folgenden Zahlenpaaren je das kgV und den ggT.

- |               |                |                      |
|---------------|----------------|----------------------|
| 1. 12 und 16  | 2. 30 und 70   | 3. 56 und 84         |
| 4. 90 und 315 | 5. 546 und 780 | 6. 13'860 und 15'288 |

## 1.1 Wissensfragen (Lösungen)

1. Als Primzahl bezeichnet man jede natürliche Zahl grösser als Eins, welche nur durch sich selbst und durch Eins teilbar ist.
2. Die natürliche Zahl 15 ist keine Primzahl, denn es gilt

$$\frac{15}{15} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{15}{1} = 15 \quad \text{sowie} \quad \frac{15}{3} = 5 \quad \text{und} \quad \frac{15}{5} = 3$$

d.h. 15 ist nicht nur durch sich selbst und Eins teilbar, sondern eben auch durch 3 und 5.

3.  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \dots\}$
4. Jede gerade Zahl grösser als Zwei ist durch sich selbst, durch Eins und durch Zwei teilbar. Für die natürliche Zahl 10 beispielsweise gilt

$$\frac{10}{10} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{10}{1} = 10 \quad \text{sowie} \quad \frac{10}{2} = 5$$

d.h. es ist keine Primzahl.

5. Bei einer Primzahlzerlegung wird eine Zahl vollständig in Primzahlen zerlegt. Es gilt z.B.

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

d.h. man kann die Zahl nicht mehr weiter zerlegen, da nur noch Primzahlen übrig bleiben.

6. Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer einzelnen Ziffern, siehe dazu den Abschnitt 2.2 in der Formelsammlung. Für  $n = 14'322$  gilt beispielsweise

$$q(n) = 1 + 4 + 3 + 2 + 2 = 12$$

7. Die alternierende Quersumme einer natürlichen Zahl erhält man, wenn ihre einzelnen Ziffern abwechselungsweise addiert und subtrahiert werden, siehe dazu den Abschnitt 2.2 in der Formelsammlung. Für  $n = 14'322$  gilt beispielsweise

$$q_a(n) = 1 - 4 + 3 - 2 + 2 = 0$$

8. Man kann damit die Teilbarkeit von Zahlen untersuchen, siehe dazu den Abschnitt 2.5 in der Formelsammlung.
9. Das kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) bzw. der kgN (kleinster gemeinsamer Nenner) wird bestimmt, um mehrere Brüche gleichnamig zu machen.
10. Der ggT (grösster gemeinsamer Teiler) ist das Produkt all jener Faktoren, welche man bei einem Bruch kürzen kann.

## 1.2 Teilbarkeit (Lösungen)

Die Zahl 420 ist durch zwei teilbar, da sie gerade ist und durch fünf teilbar, weil ihre letzte Ziffer eine Null ist. Sie ist ausserdem durch drei teilbar, weil ihre Quersumme  $4 + 2 + 0 = 6$  durch drei teilbar ist.

$$420 = 2 \cdot 210 = 2 \cdot 5 \cdot 42 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 14 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

### 1.3 kgV und ggT (Lösungen)

1. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2^4 \cdot 3 = 48 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 2^2 = 4$$

2. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\70 &= 2 \cdot 5 \cdot 7\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 2 \cdot 5 = 10$$

3. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}56 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \\84 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 2^2 \cdot 7 = 28$$

4. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}90 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\315 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 3^2 \cdot 5 = 45$$

5. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}546 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \\780 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 5460 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

6. Eine Primfaktorzerlegung liefert

$$\begin{aligned}13/860 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\15/288 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\text{kgV} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 2'522'520 \quad \text{und} \quad \text{ggT} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$